

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

GRUPO DE ENSINO DE FÍSICA

FLUIDOS REAIS E IDEAIS

Joecir Palandi
Dartanhan Baldez Figueiredo
João Carlos Denardin
Paulo Roberto Magnago
Karla Weber

Capa: Naieni Ferraz

SANTA MARIA - RS
2010

PREFÁCIO

Os professores do Grupo de Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria (GEF-UFSM) orientam acadêmicos de licenciatura nas disciplinas de Estágio Supervisionado em Ensino de Física e desenvolvem atividades de pesquisa em ensino e de extensão, procurando contribuir para o aperfeiçoamento dos professores do ensino médio. As atividades de extensão envolvem empréstimo de material instrucional para atividades experimentais, apresentação de cursos, oficinas e palestras e elaboração de cadernos didáticos.

De modo geral, a necessidade que os professores do ensino médio têm de educação continuada não fica satisfeita devido à dificuldade de acesso a atividades presenciais como oficinas e cursos de atualização e também devido à pouca oferta de material de apoio, como cadernos didáticos e artigos de divulgação. Além disso, entre esses professores, o livro texto goza de excessiva importância, determinando a seqüência dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula e o próprio método de ensino, que privilegia a solução de exercícios e problemas numéricos, como se a aplicação coerente das expressões matemáticas pudesse levar, por si mesma, à aprendizagem significativa. Por outro lado, os conhecimentos de Física são produzidos por meio de atividades teóricas e experimentais integradas e, por isso, a prática docente baseada apenas no trabalho com o livro texto apresenta a disciplina de modo parcial e incompleto. Esses três fatores representam importantes limitações ao ensino de Física na escola de ensino médio.

O GEF-UFSM defende que uma melhor compreensão dos conteúdos é alcançada quando o professor privilegia a discussão conceitual aprofundada dos princípios e leis fundamentais e de como eles operam no interior dos fenômenos, trabalhando paralelamente a notação matemática, o vocabulário, as representações gráficas, as escalas e as proporções. Essa compreensão não é alcançada pelo ensino centrado no professor, que privilegia a solução de exercícios e problemas numéricos e que conduz atividades experimentais isoladas, apenas para reproduzir fenômenos ou comprovar o valor numérico de uma ou outra constante, e sim através do processo que se estabelece pelo diálogo professor-aluno, construído a partir dos conhecimentos que os alunos já dominam. Nesse sentido, o GEF-UFSM defende uma abordagem ao ensino de Física em que a experimentação acompanhe a seqüência lógica dos conteúdos, com uma estratégia de integração à teoria, motivando o diálogo em sala de aula, apoiando a discussão conceitual e vinculando-a a elementos concretos na observação.

Este caderno foi elaborado para dar ao professor uma visão mais consistente e rigorosa do paradigma da Física, ajudando-o na elaboração de planejamentos em que os conteúdos sejam distribuídos ao longo da carga horária disponível de modo mais condizente com sua importância relativa, com estratégias de ensino mais próximas do modo de fazer ciência. O planejamento das atividades didáticas não deve ser uma tarefa meramente burocrática, uma simples cópia do sumário do livro texto, sem qualquer vínculo com a importância relativa dos conteúdos da disciplina em questão, com a carga horária disponível, com os conhecimentos que seus alunos já dominam e com a realidade do meio em que a escola está inserida. Um planejamento bem executado e constantemente reavaliado pode ser um instrumento útil para que o processo de ensino-aprendizagem se estabeleça e seja efetivo. Este caderno foi elaborado para ser útil também no trabalho direto com os alunos em sala de aula e, para isso, incorpora discussões detalhadas de um grande número de exemplos e propõe exercícios de aplicação.

O GEF-UFSM agradece as críticas e sugestões que possam levar esse caderno mais facilmente aos seus objetivos.

SUMÁRIO

FLUIDOS REAIS

I	Introdução	1
II	Modelos	1
III	Teoria Cinética dos Gases Ideais	2
IV	Forças Intermoleculares	5
V	Gases Reais	8
VI	Modelo Cinético dos Líquidos	9
VII	Viscosidade	11
VIII	Lei de Poiseuille	14
IX	Força de Arraste	17
X	Número de Reynolds	21
XI	Tensão Superficial	24
XII	Gotas de Líquido	28
XIII	Influência de um Segundo Meio	29
XIV	Interface entre Líquido e Sólido	30
XV	Pressão de Laplace	34
XVI	Capilaridade	37

FLUIDOS IDEAIS

I	Introdução	41
II	Pressão	41
III	Densidade	43
IV	Experimento de Torricelli	44
V	Teorema Fundamental da Hidrostática	46
VI	Variação da Pressão Atmosférica com a Altitude	51
VII	Teorema de Pascal	52
VIII	Teorema de Arquimedes	53
IX	Equação da Continuidade	56
X	Equação de Bernoulli	58

FLUIDOS REAIS

I. Introdução

As propriedades mais notáveis dos sólidos cristalinos são a dureza, a incompressibilidade e as características geométricas. Estas propriedades podem ser explicadas em termos da Teoria Atômica, envolvendo a idéia de um retículo ou arranjo de átomos permanentemente ordenados, ligados entre si por forças intensas.

As propriedades mais notáveis dos gases são a compressibilidade, a fluidez e a capacidade de preencher totalmente qualquer recipiente. A Teoria Cinética explica estas propriedades em termos de um modelo cuja característica central é o movimento desordenado de um grande número de moléculas que raramente exercem ações sensíveis umas sobre as outras.

Assim, os sólidos e os gases apresentam comportamentos opostos.

Os líquidos apresentam algumas propriedades que aparecem nos gases e algumas que aparecem nos sólidos. Como os gases, são isotrópicos, isto é, suas características físicas não dependem da direção em que são observadas ou medidas, e fluem facilmente por efeito de qualquer diferença de pressão. Como os sólidos, são densos, relativamente incompressíveis e suas propriedades são determinadas pela natureza e intensidade das forças intermoleculares.

Em relação à estrutura microscópica, o fato de os líquidos serem isotrópicos significa que não têm estrutura organizada como os sólidos, mas como têm densidades, em geral, apenas cerca de 10% menor do que as dos correspondentes sólidos, suas moléculas devem estar arrumadas com certa regularidade, não apresentando o caos associado aos gases.

II. Modelos

A ciência constrói representações do mundo. Os elementos básicos dessas representações são os modelos. Um modelo é uma imagem mental simplificada e idealizada, que simula, com maior ou menor precisão, o comportamento de um sistema. O modelo incorpora apenas as características consideradas importantes para a descrição do sistema, selecionadas intuitivamente ou por conveniência matemática. De modo geral, o propósito de um modelo é simplificar certa realidade para que ela possa ser analisada. A construção de um modelo se dá no contexto de uma teoria, quando fatos estabelecidos pela observação e hipóteses sobre a estrutura do sistema e sobre o comportamento dos seus constituintes básicos são correlacionados por leis e princípios. Como exemplo, vamos considerar o modelo de Bohr para o átomo, construído com as seguintes hipóteses:

- Num referencial em que o núcleo do átomo está em repouso, os elétrons giram ao redor dele em órbitas circulares de acordo com as leis de Newton.
- Os elétrons podem ocupar apenas certas órbitas especiais ao redor do núcleo, chamadas órbitas estacionárias.
- Um elétron pode passar de uma órbita estacionária para outra se o átomo emite ou absorve radiação eletromagnética.

É importante compreender que o modelo de Bohr para o átomo não é o desenho de uma bolinha com circunferências concêntricas para representar o núcleo e as órbitas dos elétrons, como se encontra nos livros didáticos. Nem uma bola de

isopor com argolas de arame ao seu redor, que o professor manuseia para explicar o conteúdo aos alunos. O modelo de Bohr para o átomo é simplesmente a idéia de que existe um núcleo cercado por elétrons que se movem segundo as leis de Newton. Para o modelo não faz diferença se essas partículas têm existência real ou se não passam de idéias desenvolvidas para tentar entender o comportamento dos átomos reais em certas situações e fazer previsões sobre o que pode ser observado em outras situações.

Como os modelos são construídos para dar sentido ao mundo, é necessário que sejam validados. Em outras palavras, através da verificação experimental das suas previsões, as hipóteses, aproximações e limites de aplicabilidade do modelo são testados. Se o modelo tem apenas um sucesso parcial na predição do comportamento do sistema, as hipóteses iniciais devem ser modificadas. Pode acontecer também que um modelo seja completamente abandonado com base em novas descobertas.

O modelo atômico de Bohr permite compreender alguns aspectos da estrutura dos átomos, em particular, dos átomos mais simples, mas falha redondamente na explicação de muitos outros aspectos. De qualquer modo, mesmo tendo sido substituído por um modelo mais elaborado, ele ainda é útil para uma primeira abordagem dos fenômenos atômicos.

Um modelo pode ser também uma representação matemática de um conceito. Assim, o modelo associado ao conceito de força é construído a partir das seguintes proposições:

- Toda força é representada por um vetor.
- As forças que agem sobre uma determinada partícula, causadas por um número qualquer de outras partículas, são independentes umas das outras, isto é, o efeito de cada uma delas é independente dos efeitos das demais.
- O efeito de um número qualquer de forças sobre uma partícula é idêntico ao efeito de uma única força, chamada força resultante, representada pelo vetor que resulta da soma dos vetores que representam aquelas forças.

As duas últimas proposições, tomadas em conjunto, constituem o que chamamos princípio de superposição. Estritamente falando, podemos dizer que as forças devem ser representadas matematicamente por vetores devido ao princípio de superposição.

A qualidade de um modelo depende de certos fatores como, por exemplo, do número de hipóteses e proposições iniciais necessárias para construí-lo. Um bom modelo é aquele em que esse número é mínimo. Além disso, como todo modelo é construído a partir de certo conjunto de observações, um bom modelo é aquele que explica o maior número possível de características dessas observações. Finalmente, um bom modelo deve ser capaz de predição. Em outras palavras, deve ser capaz de explicar outras observações além daquelas que serviram de base para sua construção.

III. Teoria Cinética dos Gases Ideais

Amostras gasosas não têm formas permanentes nem volumes definidos porque tendem a preencher completamente os recipientes onde são colocadas. Amostras gasosas têm alta compressibilidade e nas mesmas condições exercem aproximadamente a mesma pressão. A Teoria Cinética explica de modo satisfatório essas e outras propriedades das amostras de gases a partir de um modelo microscópico em que uma amostra de gás é descrita como composta de um grande

número de partículas em contínuo movimento, colidindo umas com as outras e com as paredes do recipiente.

Como o volume ocupado pelas partículas é muito menor do que o volume do recipiente, as forças exercidas pelas partículas umas sobre as outras são muito pouco efetivas. Isso explica a alta compressibilidade das amostras de gás e a tendência que as partículas têm de ocupar todo o volume disponível. A pressão de uma amostra de gás é compreendida em termos da taxa de transferência da quantidade de movimento das partículas para as paredes do recipiente por causa das colisões e a temperatura é compreendida em termos da energia cinética média das partículas.

A Teoria Cinética é uma teoria microscópica em que as leis da Mecânica Newtoniana são consideradas verdadeiras em escala molecular. Mas como uma amostra de gás é descrita como composta de um número extremamente grande de partículas, não podemos pretender especificar as posições e as velocidades de cada uma dessas partículas e tentar aplicar as leis de Newton para calcular os valores individuais das grandezas físicas de interesse. Ao invés disso, usamos procedimentos estatísticos para calcular valores médios. De qualquer forma, o que medimos experimentalmente são valores médios e os resultados da teoria concordam muito bem com os dados experimentais.

Genericamente falando, as amostras gasosas são formadas por moléculas, exceto no caso de amostras de gases nobres, que são formadas por átomos. Por simplicidade, nesse caderno não faremos essa distinção e usaremos a palavra “molécula” para as unidades fundamentais de qualquer amostra de gás.

Como já dissemos acima, um modelo é uma imagem mental simplificada e idealizada, que simula, com maior ou menor precisão, o comportamento de um sistema. O modelo da Teoria Cinética para uma amostra de gás ideal se baseia nas seguintes hipóteses.

- Uma amostra de gás é constituída por um número muito grande de moléculas em movimento desordenado.
- As forças intermoleculares são desprezíveis, isto é, as moléculas interagem apenas nas colisões mútuas e com as paredes do recipiente e o seu movimento, entre colisões sucessivas, é retilíneo e uniforme.
- As colisões são elásticas e de duração desprezível.
- As dimensões das moléculas são muito menores do que a distância média entre elas e o seu volume próprio pode ser desprezado frente ao volume do recipiente.
- O movimento das moléculas que constituem a amostra de gás acontece segundo as leis de Newton.

A característica mais importante desse modelo da Teoria Cinética é que as moléculas, na maior parte do tempo, não exercem forças umas sobre as outras, exceto quando colidem. Para justificar essa característica devemos considerar o seguinte. Segundo a lei das pressões parciais de Dalton, a pressão total de uma mistura de amostras de gases é a soma das pressões que cada amostra de gás exerceria se as demais não estivessem presentes. Isto significa que são desprezíveis as forças entre as moléculas de uma amostra de gás e as moléculas das outras amostras de gás da mistura. Agora, pensando em uma amostra de gás como uma mistura de duas amostras de gases idênticos, podemos concluir que são desprezíveis as forças entre suas próprias moléculas. Assim, todas as propriedades macroscópicas óbvias de uma amostra de gás são conseqüências primárias do movimento das suas moléculas e é por isso que se fala em Teoria Cinética dos gases.

As conseqüências mais importantes desse modelo cinético são as relações:

$$PV = \frac{2}{3} N \left(\frac{1}{2} m v_{qm}^2 \right)$$

e

$$\frac{1}{2} m v_{qm}^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

Nessas expressões, P, V e T representam, respectivamente, a pressão, o volume e a temperatura Kelvin da amostra de gás ideal, m representa a massa de uma molécula e v_{qm} representa a velocidade quadrática média, definida como a raiz quadrada do valor médio dos quadrados dos módulos das velocidades das moléculas:

$$v_{qm} = \sqrt{[v^2]_m}$$

Além disso, N representa o número de moléculas da amostra do gás em questão e k_B representa a constante de Boltzmann:

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J / K}$$

A primeira expressão relaciona a pressão da amostra de gás à energia cinética média de translação das suas moléculas e a segunda, relaciona a temperatura absoluta (Kelvin) a essa mesma energia cinética média. Se a pressão de uma amostra de gás aumenta, a energia cinética média de suas moléculas aumenta e, também, a sua temperatura.

Através desse modelo, podemos explicar, com boa precisão, as leis dos gases reais e fazer previsões sobre seu comportamento, desde que em situações não muito diferentes das usuais. Não podemos, com esse modelo, descrever o comportamento de uma amostra de gás real em altas pressões ou baixas temperaturas.

A distância média percorrida por uma molécula entre duas colisões sucessivas é chamada livre caminho médio. À medida que o volume do recipiente cresce, com a temperatura constante, o livre caminho médio das moléculas se torna cada vez maior e as forças intermoleculares se tornam cada vez menos efetivas. À medida que a temperatura cresce, com o volume constante, a energia cinética média das moléculas cresce e as forças intermoleculares se tornam cada vez menos efetivas porque o tempo de colisão diminui. Assim, o comportamento de um gás real se aproxima do comportamento de um gás ideal para baixas pressões e/ou altas temperaturas.

A alta compressibilidade de um gás é explicada pelos pequenos volumes próprios das moléculas relativamente ao espaço disponível para o seu movimento. A pressão exercida por um gás contra as paredes do recipiente é atribuída à taxa de transferência de momentum (quantidade de movimento) a estas paredes pelos impactos das moléculas.

Pela lei de Boyle-Mariotte, numa transformação a temperatura constante, a pressão de uma dada amostra de gás varia com o inverso do seu volume. Pela lei de Charles, numa transformação a volume constante, a pressão de uma dada amostra de gás varia linearmente com a sua temperatura absoluta. Estas duas leis valem para gases ideais, ou seja, valem para gases reais na medida em que eles se comportam como gases ideais.

Podemos compreender estas duas leis a partir da Teoria Cinética como segue. Se o volume da amostra gasosa diminui e a temperatura permanece constante, as distâncias entre as paredes do recipiente diminuem sem que mude a velocidade quadrática média das moléculas. Assim, elas colidem com maior frequência com as paredes do recipiente e a pressão aumenta. Isto explica a lei de Boyle-Mariotte. Se a

temperatura da amostra gasosa aumenta e o volume permanece constante, a velocidade quadrática média das moléculas aumenta sem que mudem as distâncias entre as paredes do recipiente. Assim, as moléculas colidem com maior frequência com as paredes do recipiente e a pressão aumenta. Isto explica a lei de Charles.

O sucesso da Teoria Cinética mostra que a massa e o movimento são as únicas propriedades moleculares responsáveis pelas leis de Boyle-Mariotte e de Charles.

Exercício 1

Calcule a velocidade quadrática média dos átomos de uma amostra de hélio mantida à temperatura de 1000 K. A massa atômica do hélio é 4,0 g / mol.

Exercício 2

Uma amostra de hélio e uma amostra de argônio têm a mesma temperatura. Discuta em qual delas as moléculas do gás têm velocidade média quadrática maior.

IV. Forças Intermoleculares

Com base na terceira lei de Newton, podemos dizer que a interação entre duas moléculas quaisquer A e B de uma amostra gasosa dá origem a duas forças, uma força que a molécula A exerce sobre a molécula B e uma força que a molécula B exerce sobre a molécula A. Estas forças têm mesmo módulo, mesma direção, mas sentidos contrários e podem ser atrativas (Fig.1(a)) ou repulsivas (Fig.1(b)).

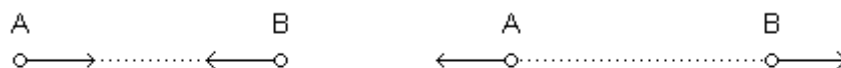


Fig.1(a)

(b)

As moléculas exercem forças atrativas umas sobre as outras quando separadas por distâncias da ordem de alguns angstroms e a intensidade destas forças diminui rapidamente à medida que as distâncias intermoleculares aumentam. Em outras palavras, as forças intermoleculares são de curto alcance.

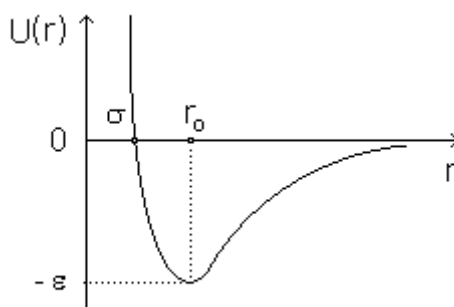


Fig.2

Quando as moléculas estão muito próximas umas das outras, elas exercem forças repulsivas e a intensidade das forças de repulsão aumenta muito rapidamente à medida que diminui a separação intermolecular.

Estas características das forças intermoleculares podem ser representadas pela curva da energia potencial de um par de moléculas em função da distância entre seus centros de massa. A Fig.2 mostra a função de Lennard-Jones:

$$U(r) = 4\varepsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 \right]$$

usada para descrever a interação entre duas moléculas esféricas não carregadas. Nesta expressão, r representa a distância entre os centros das moléculas e ε e σ são dois parâmetros característicos das moléculas interagentes.

A curva da energia potencial tem o valor mínimo $U(r_0) = -\varepsilon$ em $r = r_0 \approx 1,12 \sigma$. Dessa forma, o parâmetro ε (com o sinal negativo) representa a energia potencial mínima de um par de moléculas.

Para todos os efeitos práticos, a energia potencial de um par de moléculas muito distantes uma da outra é zero. Além disso, se são nulas as suas energias cinéticas, a energia total do par também é zero. Agora, se essas moléculas se aproximam e colidem uma com a outra, a distância de máxima aproximação, em que as moléculas voltam a ter energias cinéticas nulas, corresponde, por conservação da energia, à distância em que a energia potencial do par também volta a ser zero. Essa distância, que pode ser considerada como sendo a soma dos raios das moléculas, ou seja, o diâmetro de cada uma delas, é exatamente igual a σ . Por isso, o parâmetro σ é usualmente tomado como sendo o diâmetro de uma molécula. Contudo, estritamente falando, as energias cinéticas de moléculas muito distantes podem ser diferentes de zero e, se assim for, quando elas colidem uma com a outra, a distância de máxima aproximação fica menor do que σ . Por isso, o diâmetro de uma molécula não é uma grandeza definida univocamente.

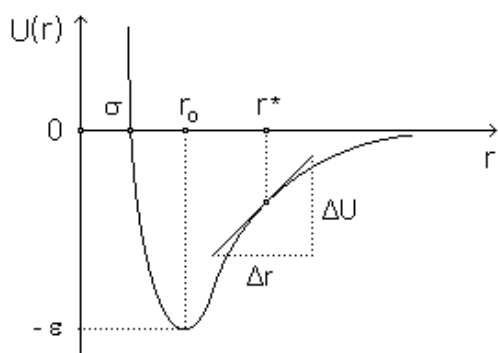
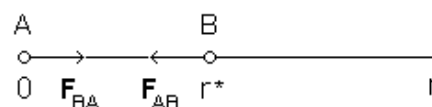


Fig.3(a)



(b)

A curva de energia potencial informa todos os detalhes das forças intermoleculares. Se as moléculas A e B estão separadas por uma distância r^* e se o referencial for fixado na molécula A (Fig.3(a)), a declividade (com o sinal trocado) da curva de energia potencial no ponto r^* fornece o módulo e o sentido da força que a molécula A exerce sobre a molécula B:

$$F_{AB}(r^*) = -\frac{\Delta U}{\Delta r}$$

Como as grandezas ΔU e Δr são positivas, $F_{AB}(r^*) < 0$. Isso indica que a força

F_{AB} , da molécula A sobre a molécula B, tem sentido oposto àquele considerado positivo para o do eixo r (Fig.3(b)). Pela terceira lei de Newton, a força F_{BA} , da molécula B sobre a molécula A, tem a mesma direção e o mesmo módulo, mas sentido contrário ao da força F_{AB} . Por isso, a força F_{BA} tem o mesmo sentido que aquele considerado positivo para o do eixo r . Desse modo, as forças F_{AB} e F_{BA} são atrativas.

De modo geral, se a distância entre as moléculas A e B é maior do que r_0 , as forças são atrativas e se a distância entre as moléculas A e B é menor do que r_0 , as forças são repulsivas.

Os valores de ϵ e σ dependem da natureza das moléculas que interagem e, em geral, aumentam à medida que aumenta o seu número atômico. A Fig.4 mostra as curvas de energia potencial de Lennard-Jones para os gases nobres hélio, argônio e criptônio.

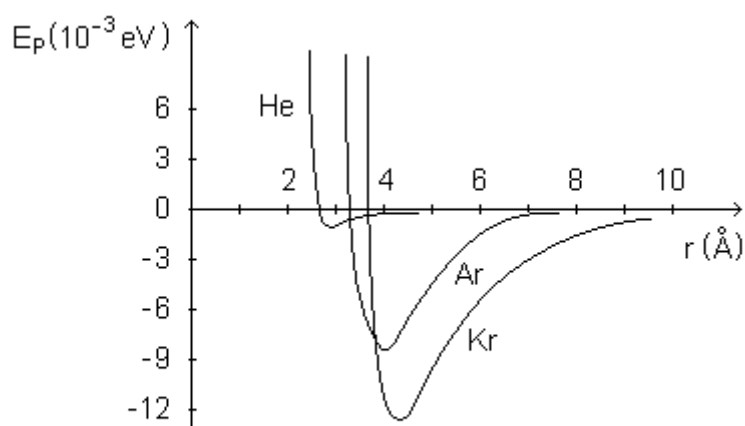


Fig.4

Para o argônio, $\epsilon \approx 8,4 \times 10^{-3}$ eV. Em pressões ordinárias, duas moléculas quaisquer estão, em geral, separadas por distâncias muito grandes, de modo que o valor numérico da energia potencial média de atração dessas moléculas é bem menor do que ϵ . Por outro lado, a Teoria Cinética fornece, para a energia cinética média de um par de moléculas de argônio em temperaturas ordinárias ($\sim 27^\circ\text{C}$):

$$E = 2\left(\frac{3}{2}k_B T\right) = 3(8,6 \times 10^{-5} \text{ eV/K})(300 \text{ K}) = 77,4 \times 10^{-3} \text{ eV}$$

Desse modo, para qualquer par de moléculas, a energia cinética média é muito maior do que o valor numérico da energia potencial média de atração. Portanto, é a energia cinética média que é grandemente responsável pelo comportamento observado nos gases.

Exercício

Os pontos de fusão do hélio, do argônio e do criptônio são, respectivamente, $T_{\text{He}} = 0,95 \text{ K}$, $T_{\text{Ar}} = 83,80 \text{ K}$ e $T_{\text{Kr}} = 115,79 \text{ K}$. Argumente fisicamente e justifique a relação $T_{\text{He}} < T_{\text{Ar}} < T_{\text{Kr}}$.

V. Gases Reais

A distância média percorrida por uma molécula entre duas colisões sucessivas é chamada livre caminho médio. À medida que o volume do recipiente cresce, com a temperatura constante, o livre caminho médio das moléculas se torna cada vez maior e as forças intermoleculares se tornam cada vez menos efetivas. À medida que a temperatura cresce, com o volume constante, a energia cinética média das moléculas cresce e as forças intermoleculares se tornam cada vez menos efetivas porque o tempo de colisão diminui. Assim, o comportamento de um gás real se aproxima do comportamento de um gás ideal para baixas pressões e/ou altas temperaturas.

A alta compressibilidade de uma amostra de gás é consequência dos pequenos volumes próprios das moléculas relativamente ao espaço disponível para o seu movimento.

Pela lei de Boyle-Mariotte, numa transformação a temperatura constante, a pressão de uma dada quantidade de gás varia com o inverso do volume e, pela lei de Charles, numa transformação a volume constante, a pressão de uma dada quantidade de gás varia linearmente com a temperatura absoluta. Estas duas leis valem para gases ideais. Em outras palavras, valem para um gás real na medida em que ele se comporta como ideal.

Pela Teoria Cinética, compreendemos que, mantida a temperatura constante, a pressão aumenta à medida que o volume diminui porque as moléculas colidem com maior frequência com as paredes do recipiente. Além disso, compreendemos que, mantido o volume constante, a pressão aumenta com o aumento da temperatura porque a elevação da temperatura aumenta a velocidade média das moléculas e, com isso, aumenta tanto a frequência das colisões com as paredes do recipiente quanto as transferências de quantidade de movimento.

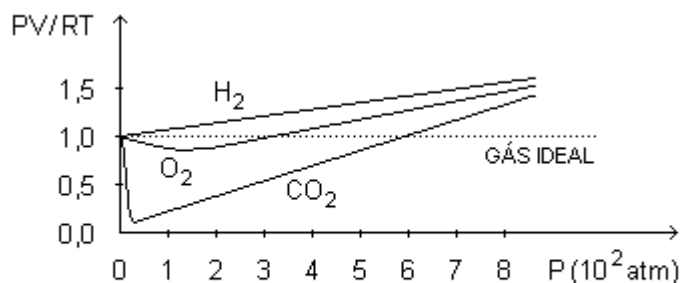


Fig.5

O sucesso da Teoria Cinética mostra que a massa e o movimento são as únicas propriedades moleculares responsáveis pelas leis de Boyle-Mariotte e de Charles. No modelo cinético descrito acima, o volume próprio das moléculas é inteiramente desprezado comparado ao volume disponível para o seu movimento e, também, as forças coesivas entre as moléculas são consideradas sem efeito. Assim, os comportamentos dos gases reais que se desviam do comportamento previsto pelas leis de Boyle-Mariotte e de Charles indicam a existência de forças entre moléculas de tamanho finito e permitem avaliar os módulos dessas forças.

Para discutir os desvios das leis dos gases ideais, construímos gráficos da grandeza PV / RT em função da pressão, com a temperatura constante, para amostras de três gases a 0 °C: hidrogênio, oxigênio e dióxido de carbono (Fig.5). Com isso, a lei de Boyle-Mariotte para um gás ideal fica representada por uma linha horizontal.

Podemos entender a forma das curvas para as amostras de oxigênio e o

dióxido de carbono pelo seguinte argumento. Pela segunda lei de Newton, sabemos que $\Delta(mv) = F\Delta t$. Isto significa que a variação da quantidade de movimento de uma partícula depende da força aplicada e do intervalo de tempo durante o qual a força permanece atuando. As forças intermoleculares são efetivas quando as moléculas estão relativamente próximas umas das outras e, pelo que foi dito acima, quando as moléculas permanecem próximas durante um intervalo de tempo suficientemente grande.

Se mantivermos uma amostra de gás a baixa pressão, mesmo que também a baixa temperatura, as moléculas permanecem, em média, muito afastadas umas das outras. Se mantivermos a amostra de gás a alta temperatura, mesmo que também a alta pressão, as moléculas se movem com velocidades de grandes módulos e não permanecem, umas nas proximidades das outras, por intervalos de tempo apreciáveis. Nas duas situações, as forças intermoleculares não são efetivas e a amostra de gás tem um comportamento ideal.

Se tomarmos uma amostra de gás a temperatura baixa e a pressão baixa, numa situação em que o seu comportamento é ideal, e, mantendo inalterada a temperatura, formos aumentando a pressão, as moléculas vão ficando, em média, cada vez mais próximas umas das outras e as forças atrativas vão se tornando cada vez mais efetivas. Assim, com o aumento da pressão, o volume da amostra de gás diminui além do que seria de esperar se o seu comportamento continuasse sendo ideal e o faz numa proporção cada vez maior. Em consequência, o produto PV diminui em vez de permanecer constante. Por isso, na região de baixas pressões da Fig.5, as curvas correspondentes às amostras de oxigênio e de dióxido de carbono caem com o aumento da pressão.

Se continuarmos aumentando a pressão da amostra de gás, as moléculas continuam ficando, em média, cada vez mais próximas umas das outras e as forças intermoleculares de atração continuam ficando mais e mais efetivas. Contudo, a partir de certo ponto, as forças intermoleculares de repulsão se tornam efetivas, contrabalançam e suplantam as forças intermoleculares atrativas. Com o aumento da pressão, o volume da amostra de gás diminui menos do que poderíamos esperar e o faz numa proporção cada vez maior. Assim, o produto PV aumenta. Por isso, na região de pressões mais altas da Fig.5, as curvas correspondentes às amostras de oxigênio e de dióxido de carbono sobem com o aumento da pressão.

Portanto, para altas pressões e temperaturas baixas, as forças intermoleculares têm papel importante. Se esse papel fica mais importante do que as tendências cinéticas das moléculas, a amostra de gás pode perder suas propriedades características e se condensar, formando um líquido ou um sólido.

VI. Modelo Cinético dos Líquidos

Nos líquidos e nos gases, as moléculas estão em movimento contínuo e desordenado. Nestas duas fases, a energia cinética média e a fração de moléculas com dado valor de energia cinética são as mesmas à mesma temperatura. Num líquido, porém, as moléculas estão muito mais próximas umas das outras, em média, do que nos gases, e as forças intermoleculares são muito mais efetivas, de modo que a energia potencial é menor (as forças são atrativas) e o livre caminho médio, muito menor, do que os correspondentes para as moléculas de fase gasosa.

Muitos experimentos simples sugerem a existência destas forças intermoleculares de curto alcance. Uma placa de vidro, por exemplo, pode ser colocada muito perto da superfície de um líquido sem ser especialmente atraída em sua direção. Mas se a placa de vidro toca o líquido, o líquido adere à placa com surpreendentemente intensidade. Se dois blocos bem polidos são pressionados um

contra o outro, forças surpreendentemente intensas são necessárias para separá-los. Uma gota de mercúrio no plano, em vez de se espalhar como uma camada de espessura infinitesimal devido à atração gravitacional, toma uma forma quase esférica. Os processos de soldagem e caldeamento são processos que dependem da existência de forças intermoleculares.

Quando uma substância passa do estado sólido para o estado líquido, na maioria dos casos, o volume aumenta cerca de 10%. O líquido experimenta, com o aumento de temperatura, uma expansão (dilatação) contínua. Este aumento de volume após a fusão é uma consequência do aumento da separação média das moléculas e de um ligeiro decréscimo na efetividade das forças intermoleculares.

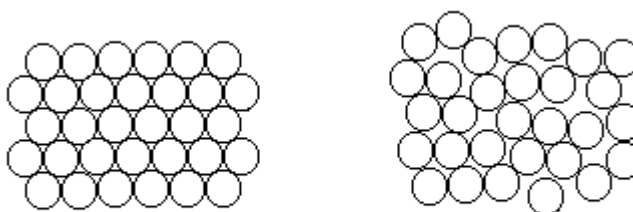


Fig. 6(a)

(b)

Em um sólido cristalino, os átomos (ou moléculas) se encontram densamente empacotados e ocupam os sítios de uma estrutura reticular (Fig. 6(a)). Em um líquido, as moléculas, em sua grande maioria, também se encontram densamente empacotadas, mas sem a estrutura reticular dos sólidos cristalinos (Fig. 6(b)). No líquido, existem regiões onde os arranjos moleculares são empacotamentos densos quase perfeitos e regiões onde as moléculas têm menos vizinhos. Esta irregularidade introduz vazios que, devido ao movimento desordenado das moléculas, não têm posição, forma ou tamanho fixos. Estes vazios fazem com que a distância média de separação entre as moléculas do líquido seja maior do que a distância média de separação entre os átomos (ou moléculas) do sólido, de modo que a correspondente energia potencial média associada às interações entre os constituintes básicos é também maior. Isso explica, entre outros fenômenos, a necessidade de fornecer energia para que a substância passe do estado sólido para o estado líquido.

Existem outras propriedades dos líquidos que podem ser explicadas em termos de sua estrutura desordenada. Por exemplo, a fluidez. Um sólido normalmente tem uma estrutura rígida e o líquido, uma estrutura que cede facilmente sob a ação de qualquer força aplicada. A deformação de um sólido cristalino perfeito importa em deslocar, ao mesmo tempo, planos de átomos em relação a outros planos, ou seja, romper as ligações entre um grande número de átomos. Este número diminui com o aumento do número de imperfeições no retículo cristalino. Num líquido, existe grande número de imperfeições (ou vazios), de modo que são muitas as possibilidades pelas quais alguns átomos podem se mover simultaneamente, sendo relativamente fracas as forças intermoleculares que se opõem a tal movimento. Uma molécula pode se deslocar para um vazio vizinho deixando outro vazio para ser ocupado por outra molécula, e assim por diante.

Exercício

Quando uma substância passa do estado sólido para o estado líquido, na maioria dos casos, o volume aumenta cerca de 10%. No caso da água, o volume diminui cerca de 10%. Descubra o porquê desse comportamento anômalo da água.

VII. Viscosidade

A viscosidade dos fluidos vem do atrito interno. Para entender essa afirmativa, vamos considerar duas placas sólidas, planas, horizontais, uma sobre a outra, com certa quantidade de fluido entre elas (Fig.7). Fixando o referencial numa das placas e aplicando uma força horizontal constante F na outra placa, a experiência mostra que esta última se move, durante certo intervalo de tempo, com aceleração não nula e, depois, com velocidade constante v_T , chamada velocidade limite ou velocidade terminal. O módulo da velocidade terminal é proporcional ao módulo da força aplicada, isto é, se a intensidade da força aplicada for duplicada, o módulo da velocidade terminal também duplica, se a intensidade da força aplicada for triplicada, o módulo da velocidade terminal também triplica e assim por diante.

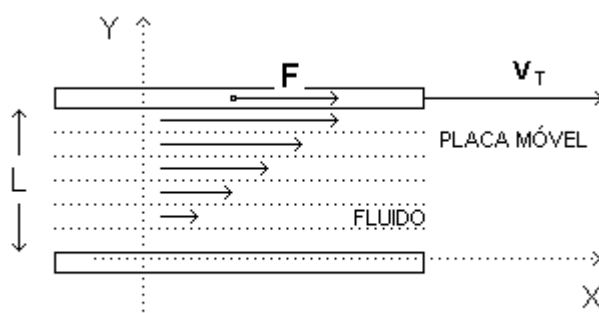


Fig.7

Durante o movimento, o fluido entre as placas se separa em lâminas paralelas entre si e paralelas às placas. A primeira lâmina, adjacente à placa móvel, se move solidária a ela e, por isso, tem velocidade v_T . A segunda lâmina, adjacente à primeira, se move com velocidade de módulo menor. A terceira lâmina, adjacente à segunda, se move com velocidade de módulo ainda menor e assim por diante. A última lâmina, adjacente à placa imóvel, está solidária a ela e, por isso, tem velocidade nula. É fato experimental que os módulos das velocidades das lâminas variam linearmente entre os dois extremos, zero e v_T . Por isso, podemos escrever, para o módulo da velocidade da lâmina a uma distância genérica y da placa em repouso:

$$v(y) = \left(\frac{v_T}{L} \right) y$$

Como lâminas adjacentes se deslocam com velocidades de módulos diferentes, elas deslizam uma em relação à outra. A viscosidade vem do atrito entre lâminas adjacentes. Além disso, por causa desse atrito, existe transformação de energia mecânica em energia interna.

A expressão acima indica que a variação do módulo da velocidade das camadas em que se divide o fluido com a distância à placa em repouso no referencial considerado é:

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} = \frac{v_T}{L}$$

Como já dissemos, mantendo A e L constantes, v_T aumenta com o aumento de F . Além disso, mantendo F e A constantes, v_T aumenta com o aumento de L e

mantendo F e L constantes, v_T diminui com o aumento de A . Desse modo, usando o símbolo \propto para indicar proporcionalidade, temos:

$$v_T \propto FL \left(\frac{1}{A} \right)$$

e com a introdução da constante de proporcionalidade η , podemos escrever, por conveniência:

$$F = \eta A \left(\frac{v_T}{L} \right)$$

Esta expressão define η , o coeficiente de viscosidade do fluido, que depende apenas do fluido e da sua temperatura.

Para definir o coeficiente de viscosidade, escolhemos o caso em que o fluido, por efeito do movimento de uma das placas, divide-se em camadas muito estreitas, que se deslocam com velocidades de diferentes módulos. Esse tipo de escoamento é chamado de laminar ou lamelar e é caracterizado pela proporcionalidade entre o módulo da força aplicada à placa móvel e o módulo da sua velocidade terminal, no referencial em que a outra placa está em repouso.

Por outro lado, definimos τ , a tensão de cisalhamento, pelo cociente do módulo da força aplicada à placa móvel pela sua área:

$$\tau = \frac{F}{A}$$

e, com isso, a expressão acima, que define o coeficiente de viscosidade, fica:

$$\tau = \eta \frac{\Delta v}{\Delta L}$$

Esta expressão representa matematicamente a lei de Newton para a viscosidade. Os fluidos para os quais ela é verdadeira são chamados de fluidos newtonianos.

Da expressão que define o coeficiente de viscosidade temos também que a unidade do coeficiente de viscosidade, que vamos representar por $[\eta]$, pode ser escrita como o produto da unidade de pressão pela unidade de tempo. No SI temos, portanto:

$$[\eta] = \left(\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right) \text{s} = (\text{Pa})(\text{s}) \quad (\text{Sistema Internacional})$$

No sistema CGS, a unidade do coeficiente de viscosidade é chamada de poise e é simbolizada por P. Assim:

$$[\eta] = P = 10^{-1} (\text{Pa})(\text{s}) \quad (\text{Sistema CGS})$$

A tabela a seguir mostra os coeficientes de viscosidade para algumas substâncias.

Fase	Substância	η (P)
Líquido	Glicerina (20 °C)	8,3
	Água (0 °C)	$1,8 \times 10^{-2}$
	Água (100 °C)	$2,8 \times 10^{-3}$
	Éter (20 °C)	$1,2 \times 10^{-2}$
	Mercúrio (20 °C)	$1,5 \times 10^{-2}$
	Ar (- 192 °C)	$1,7 \times 10^{-3}$
Gás	Hidrogênio (15 °C)	$8,9 \times 10^{-5}$
	Ar (0 °C)	$1,7 \times 10^{-4}$
	Ar (20 °C)	$1,8 \times 10^{-4}$
	Ar (100 °C)	$2,2 \times 10^{-4}$
	Água (100 °C)	$1,3 \times 10^{-4}$
	CO ₂ (15 °C)	$1,4 \times 10^{-4}$

Os coeficientes de viscosidade dos óleos lubrificantes automotivos são normalmente expressos na escala SAE, estabelecida pela Sociedade dos Engenheiros Automotivos dos EEUU. Um óleo cuja viscosidade SAE é 10 a 55 °C, por exemplo, possui viscosidade entre 1,6 P e 2,2 P.

Suspensões coloidais, emulsões e geles não seguem a lei de Newton para a viscosidade e são chamados de fluidos não newtonianos. O coeficiente de viscosidade desses fluidos não é constante. Sangue, “ketchup”, suspensões de amido, tintas e petróleo cru são exemplos de fluidos não newtonianos.

Viscosidade nos Líquidos

A viscosidade dos fluidos vem do atrito interno. Nos líquidos, isto significa que a viscosidade vem das forças de atração entre moléculas relativamente juntas.

Por outro lado, com o aumento da temperatura, maior se torna a energia cinética média das moléculas e, em conseqüência, menor se torna o intervalo de tempo médio durante o qual as moléculas passam umas nas proximidades das outras. Desse modo, as forças intermoleculares se tornam menos efetivas e a viscosidade diminui com o aumento da temperatura.

Viscosidade nos Gases

Em uma gás, as moléculas estão, em média, muito longe umas das outras. Desse modo, as forças de atração entre moléculas não são efetivas e, por isso, a viscosidade do gás não pode se originar dessas forças.

A viscosidade de um gás vem da transferência de momentum, isto é, da transferência de quantidade de movimento entre camadas adjacentes que se movem

com velocidades de módulos diferentes. Para compreender o fenômeno, vamos considerar um gás que escoar através de um tubo cilíndrico, com uma velocidade de módulo não muito grande num referencial fixo no tubo, de modo que o escoamento seja lamelar e estacionário. Vamos supor que A e B sejam duas camadas cilíndricas adjacentes, com a camada A se movendo mais rapidamente que a camada B (Fig.8).

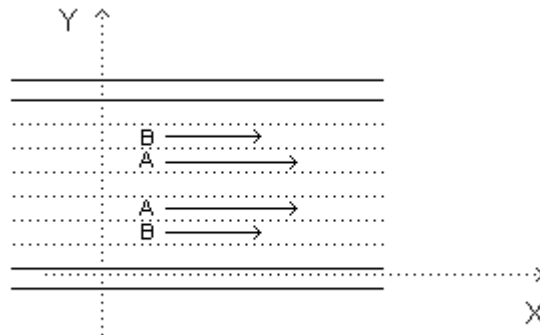


Fig.8

Então, o módulo da quantidade de movimento transferida quando moléculas da camada A passam para a camada B é maior do que o módulo da quantidade de movimento transferida quando moléculas da camada B passam para a camada A. O módulo da velocidade da camada mais rápida tende a diminuir e o módulo da velocidade da camada mais lenta tende a aumentar. Dito de outra maneira, o módulo da velocidade relativa entre as camadas tende a diminuir e é por isso que podemos dizer que existe atrito interno no gás.

Exercício 1

Compare as definições de pressão e de tensão de cisalhamento.

Exercício 2

Enquanto que, nos líquidos, a viscosidade decresce com o aumento da temperatura, nos gases ocorre o contrário. Explique o porquê.

VIII. Lei de Poiseuille

Vamos considerar o movimento de um fluido através de um tubo cilíndrico num referencial fixo no tubo. Quando todos os elementos de volume do fluido que passam por um ponto qualquer dentro do tubo o fazem sempre com a mesma velocidade, o escoamento é chamado de estacionário ou permanente. Em pontos diferentes, as velocidades dos elementos de volume podem ser diferentes. Um escoamento estacionário pode ser conseguido se o fluido se desloca com velocidade de módulo relativamente pequeno.

Consideremos, então, um fluido viscoso em escoamento estacionário e lamelar através de um tubo cilíndrico. Desse modo, o fluido se divide em camadas cilíndricas coaxiais, que se movem com velocidades de módulos diferentes. A camada mais externa, chamada de camada limite, adere à parede do tubo e tem velocidade nula no referencial considerado. A camada central tem velocidade de módulo máximo.

Para discutir o valor do módulo da velocidade de cada camada em função da sua distância ao eixo de um tubo cilíndrico de raio R , consideremos um elemento cilíndrico do fluido, de raio r e comprimento L , coaxial com o tubo (Fig.9).

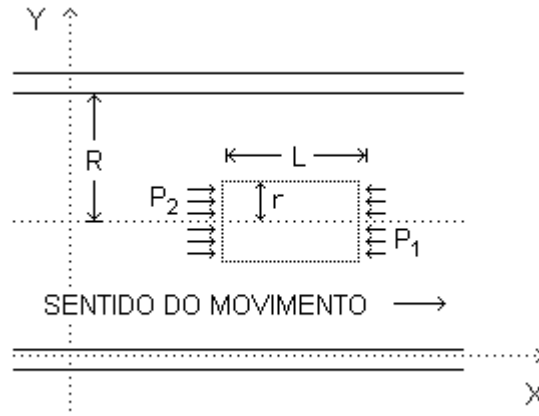


Fig.9

O elemento cilíndrico escoa por efeito de uma diferença de pressão:

$$\Delta P = P_2 - P_1$$

de modo que a força que o impulsiona no sentido do seu movimento tem módulo:

$$F = \pi r^2 \Delta P$$

Esta força deve estar em equilíbrio com a força de viscosidade, que atua em sentido contrário, na superfície cilíndrica do elemento de fluido considerado. Como a área dessa superfície é $A = 2\pi rL$, podemos escrever:

$$\pi r^2 \Delta P = -\eta(2\pi rL) \frac{\Delta v}{\Delta r}$$

e como $2r \Delta r = \Delta(r^2)$, vem:

$$\Delta v = -\left(\frac{\Delta P}{4\eta L}\right) \Delta(r^2)$$

ou então, de modo mais detalhado:

$$v(r_2) - v(r_1) = -\left(\frac{\Delta P}{4\eta L}\right) (r_2^2 - r_1^2)$$

Se esta expressão é aplicada entre uma camada cilíndrica genérica qualquer, de raio $r_1 = r$, que se desloca com velocidade de módulo v , e a camada limite, que se encontra em contato com a parede do tubo, de raio $r_2 = R$, que se encontra em repouso, obtemos:

$$v(r) = \frac{1}{4\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} \right) (R^2 - r^2)$$

Esta expressão mostra que o módulo da velocidade de uma dada camada cilíndrica do fluido num referencial fixo no tubo é diretamente proporcional ao gradiente de pressão $\Delta P/L$ e inversamente proporcional ao coeficiente de viscosidade η .

Além disso, a camada cuja velocidade tem o módulo máximo é a camada central, para a qual $r = 0$, e a camada cuja velocidade tem o módulo mínimo (e igual a zero) é a camada limite, solidária à parede do tubo, para a qual $r = R$. Entre esses dois extremos, a variação é parabólica (Fig.10).

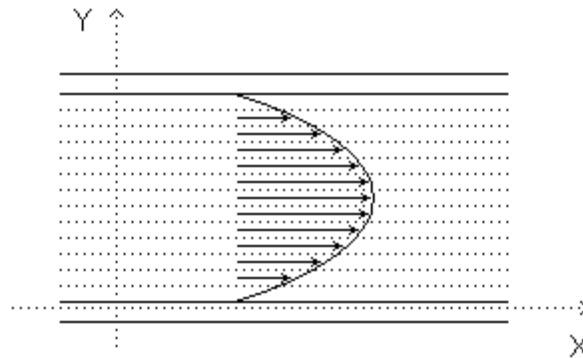


Fig.10

A vazão, ou seja, o volume de fluido que passa através de uma seção reta do tubo por unidade de tempo, é dada pela equação de Poiseuille:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} \right)$$

Portanto, a vazão é diretamente proporcional ao gradiente de pressão sobre o fluido e inversamente proporcional à viscosidade, como era esperado. Por outro lado, escrevendo:

$$\Delta P = \left(\frac{8\eta L}{\pi R^4} \right) Q$$

podemos interpretar a constante entre parênteses como uma espécie de resistência ao escoamento. Assim, esta expressão guarda certa analogia com a expressão:

$$\Delta V = Ri$$

que representa a diferença de potencial elétrico num resistor de resistência R , percorrido por uma corrente i .

Exercício

Com base na equação de Poiseuille, o coeficiente de viscosidade de um líquido pode ser determinado experimentalmente.

Considere um fluido em escoamento lamelar e estacionário em um tubo de raio R , seção reta circular de área A , percorrendo uma distância L no intervalo de tempo Δt . Como a vazão é dada por:

$$Q = Av$$

em que:

$$v = \frac{L}{\Delta t}$$

é o módulo da velocidade de escoamento do fluido, a equação de Poiseuille fornece:

$$\eta = \left(\frac{R^2}{8vL} \right) \Delta P$$

Portanto, a medida do módulo da velocidade de escoamento de um fluido através de um tubo de raio R , para um dado gradiente de pressão $\Delta P/L$, permite determinar o coeficiente de viscosidade desse fluido.

Tome um tubo de vidro com diâmetro interno de 2 mm e comprimento de 1 m e incline-o de um ângulo θ com a horizontal.

Usando uma seringa, encha o tubo com água. Meça o intervalo de tempo que a água leva para escoar através de uma distância L . Repita o procedimento dez vezes e calcule Δt_M , o intervalo de tempo médio.

Calcule o módulo da velocidade média de escoamento pela expressão:

$$v_M = \frac{L}{\Delta t_M}$$

Calcule a diferença de pressão do fluido através da distância L pela expressão:

$$\Delta P = \rho g L \sin \theta$$

Anote a temperatura ambiente.

Usando a expressão acima e os dados obtidos, calcule o coeficiente de viscosidade da água.

Repita o experimento com álcool.

IX. Força de Arraste

Consideremos um recipiente preenchido por um fluido e um corpo em movimento através desse fluido. Num referencial fixo no recipiente, o fluido está em repouso e o corpo tem velocidade não nula. O fluido exerce, sobre o corpo, uma força de arraste com sentido contrário ao da velocidade do corpo.

Se o corpo é muito menor do que o recipiente e se move longe de suas paredes, o módulo da força de arraste depende das propriedades do fluido, da forma do corpo e do módulo da velocidade do corpo no referencial em que o fluido está em repouso. De modo geral, o módulo da força de arraste aumenta quando o módulo da velocidade do corpo aumenta. Por isso, é usual escrever o módulo da força de arraste

como uma potência do módulo da velocidade do corpo:

$$F = kv^n \quad (k \text{ constante})$$

Vamos discutir os casos $n = 1$ e $n = 2$.

Lei de Stokes

Se o corpo que se move através do fluido é uma esfera de raio R e se a sua velocidade é constante, com módulo pequeno, então o módulo da força de arraste é dado por:

$$F = 6\pi\eta Rv$$

em que η é o coeficiente de viscosidade do fluido. Esta expressão matemática constitui a lei de Stokes. A lei de Stokes vale para velocidades de módulos pequenos. Isto significa, em termos aproximados, velocidades de módulos menores do que 2 m/s no ar e velocidades de módulos menores do que 0,03 m/s na água.

Lei de Newton

Se o corpo que se move através do fluido tem velocidade constante, com módulo não muito pequeno, o módulo da força de arraste é proporcional ao quadrado do módulo da velocidade do corpo:

$$F = \frac{1}{2}c\rho Av^2$$

em que c é o coeficiente de resistência do fluido para o corpo em questão, ρ é a densidade do fluido e A é a área da figura obtida pela projeção dos pontos do corpo num plano perpendicular à sua velocidade. Essa expressão matemática constitui a lei de Newton. A lei de Newton vale para velocidades de módulos não muito pequenos. Isto significa, em termos aproximados, velocidades de módulos entre 10 m/s e 200 m/s no ar e velocidades de módulos entre 0,05 m/s e 2 m/s na água.

Para uma esfera no ar, $c = 0,41$.

Velocidade Terminal

Consideremos um referencial fixo no solo e a atmosfera em repouso nesse referencial. Um corpo, abandonado de certa altura, cai através da atmosfera. A partir do instante em que o corpo começa a cair, passa a existir, sobre ele, uma força de arraste. Como o módulo da velocidade do corpo aumenta com a queda, aumenta também o módulo da força de arraste. Se a altura da qual o corpo foi abandonado é suficientemente grande, o módulo da força de arraste pode ficar igual ao módulo do peso do corpo, torna-se nula a resultante das forças que agem sobre o corpo e, pela segunda lei de Newton, torna-se nula também sua aceleração. A partir de então, o módulo da velocidade do corpo permanece constante e dizemos que o corpo atingiu sua velocidade terminal.

Exemplo

Num referencial fixo no solo, gotas de chuva caem de uma nuvem situada a 2000 m de altura.

Inicialmente, vamos calcular o módulo da velocidade com que as gotas alcançam o solo ignorando a resistência do ar. A força resultante sobre cada gota é o seu peso e o intervalo de tempo levado para chegar ao solo é dado por:

$$t = \left(\frac{2h}{g} \right)^{1/2} = \left[\frac{2(2000\text{m})}{9,8\text{m/s}^2} \right]^{1/2} = 20,2\text{s}$$

Portanto, o módulo da velocidade com que cada gota atinge o solo, no referencial considerado, é:

$$v = gt = (9,8\text{m/s}^2)(20,2\text{s}) = 198,0\text{m/s}$$

Esse valor é muito grande, de modo que, se as gotas de chuva provenientes de nuvens situadas a alguns quilômetros de altura, realmente não encontrassem a resistência do ar, elas seriam extremamente danosas ao atingir qualquer corpo na superfície da Terra.

Agora, vamos calcular o módulo da velocidade com que as gotas alcançam o solo levando em conta a resistência do ar. Podemos calcular o módulo da velocidade terminal de cada gota, no referencial considerado, igualando o módulo do seu peso ao módulo da força de arraste, este último dado pela lei de Newton:

$$mg = \frac{1}{2} c_p A v^2$$

em que m é a massa de uma gota e ρ é a densidade do ar. Dessa expressão, vem:

$$v = \left(\frac{2mg}{c_p A} \right)^{1/2}$$

Vamos supor que as gotas tenham forma esférica. O volume de uma esfera é dado por:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

e se ρ_A for a densidade da água, podemos escrever:

$$m = \rho_A V = \frac{4}{3} \pi \rho_A R^3$$

Por outro lado, a área da figura obtida pela projeção dos pontos de uma esfera num plano qualquer é:

$$A = \pi R^2$$

e então:

$$v = \left(\frac{2mg}{c_p A} \right)^{1/2} = \left(\frac{8g\rho_A R}{3c_p} \right)^{1/2}$$

Levando em conta que, a 25 °C e 1 atm:

$$\rho_A = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

e

$$\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$$

para gotas com diâmetro de 2 mm, temos:

$$v = \left(\frac{8g\rho_A R}{3c_p} \right)^{1/2} = \left[\frac{8(9,8 \text{ m/s}^2)(1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(1 \times 10^{-3} \text{ m})}{3(0,41)(1,2 \text{ kg/m}^3)} \right]^{1/2} = 7,29 \text{ m/s}$$

Devido à resistência do ar, as gotas de chuva provenientes de nuvens situadas a alguns quilômetros de altura atingem velocidades terminais com módulos relativamente pequenos e não causam danos ao atingir os corpos na superfície da Terra. Para gotas de 1 mm de diâmetro, as velocidades terminais têm módulos de cerca de 4 m/s e, para gotas de 2 mm de diâmetro, as velocidades terminais têm módulos de cerca de 6 m/s.

Uma última observação: o módulo da velocidade terminal não depende da altura da nuvem. O argumento usado subentende que a altura é suficiente para que o regime de velocidade de módulo constante seja atingido. De qualquer forma, a velocidade terminal com módulo de 7,29 m/s é alcançada pelas gotas depois de alguns metros de queda.

Exercício 1

Refrigerante é uma bebida não alcoólica, fabricada à base de água e adoçante, contendo edulcorantes, extratos sintéticos de frutas e/ou outros vegetais e dióxido de carbono. Considere uma bolha de dióxido de carbono de 1 mm de diâmetro que passa a se mover, ascendendo através do líquido. Calcule o intervalo de tempo levado pela bolha para chegar na superfície livre do líquido.

Exercício 2

Com base na lei de Stokes, o coeficiente de viscosidade de um líquido pode ser determinado experimentalmente.

Considere um recipiente contendo um líquido no qual é abandonada uma esfera. Num referencial fixo no recipiente, o líquido está em repouso e a esfera se desloca através do líquido, caindo em direção ao fundo do recipiente. Atuam, na esfera, três forças: a força peso **P**, o empuxo **E** e a força de arraste **F**.

Suponha que a esfera tenha atingido sua velocidade terminal, de módulo v . A resultante das forças que atuam nela é zero e, em módulo, segue-se que:

$$P = E + F$$

Sendo R o raio da esfera, m , sua massa, ρ_E , sua densidade, ρ_L , a densidade do líquido em questão e g , o módulo da aceleração gravitacional, e se o movimento da esfera é observado longe das paredes e do fundo do recipiente, a expressão acima fornece:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_E g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_L g + 6\pi\eta Rv$$

e daí:

$$\eta = \frac{2g}{9v} R^2 (\rho_E - \rho_L)$$

Portanto, a medida do módulo da velocidade terminal da esfera permite determinar o coeficiente de viscosidade do líquido.

Tome uma esfera de PVC, de 1 cm de diâmetro, e uma proveta com glicerina. O diâmetro da proveta deve ser bem maior do que o diâmetro da esfera.

Abandone a esfera na superfície livre da glicerina. Com a esfera tendo atingido sua velocidade terminal, meça o intervalo de tempo que ela leva para percorrer certa distância. Calcule o módulo da velocidade terminal.

Repita o procedimento várias vezes e calcule o valor médio do módulo da velocidade terminal.

Com os dados conhecidos e com os dados obtidos, calcule o coeficiente de viscosidade da glicerina usando a expressão acima.

X. Número de Reynolds

Vamos considerar novamente o movimento de um fluido através de um tubo cilíndrico num referencial fixo no tubo. Quando o fluido se desloca com velocidade de módulo relativamente pequeno, o escoamento é lamelar. Assim, o fluido se divide em camadas cilíndricas coaxiais, que se movem com velocidades de módulos diferentes. A camada mais externa, chamada de camada limite, adere à parede do tubo e tem velocidade nula no referencial considerado. A camada central tem velocidade de módulo máximo.

Quando o módulo da velocidade do fluido excede certo valor crítico, o regime de escoamento passa de lamelar para turbulento, exceto nas proximidades imediatas da parede do tubo, onde a antiga estrutura de camadas permanece. Onde o escoamento é turbulento, o movimento do fluido é altamente irregular, caracterizado por vórtices locais e um grande aumento na resistência ao escoamento.

O regime de escoamento, se lamelar ou turbulento, é determinado pela seguinte quantidade adimensional, chamada de número de Reynolds:

$$N_R = D \left(\frac{\rho}{\eta} \right) v_m$$

em que D é o diâmetro do tubo, ρ é a densidade, η é o coeficiente de viscosidade e v_m é o módulo da velocidade média de escoamento do fluido. A velocidade média de escoamento é definida como sendo a velocidade constante, igual para todos os elementos de volume do fluido, que produz a mesma vazão.

É um dado experimental que o escoamento de um fluido pode ser lamelar ou turbulento conforme o valor do número de Reynolds:

$$N_R < 2\,000 \quad \text{lamelar}$$

e

$$N_R > 3\,000 \quad \text{turbulento}$$

Se o número de Reynolds está entre 2 000 e 3 000, o escoamento é instável, podendo mudar de um regime para outro.

Exemplo

Vamos considerar o escoamento de água e de ar por um tubo com diâmetro interno de 1 cm.

Para a água a 20 °C temos:

$$\eta \approx 1 \times 10^{-2} \text{ P}$$

e

$$\rho \approx 1 \text{ g/cm}^3$$

de modo que o escoamento de água é laminar se o módulo da velocidade média de escoamento pelo tubo considerado tiver, no máximo, o valor:

$$v_m = \frac{2000 \eta}{\rho D} \approx \frac{2000 (1 \times 10^{-2} \text{ P})}{(1 \text{ g/cm}^3)(1 \text{ cm})} = 20 \text{ cm/s}$$

Um cálculo análogo mostra que o escoamento de água pelo mesmo tubo é turbulento se a velocidade média tem módulo $v_m > 30 \text{ cm/s}$.

Para o ar a 20 °C temos:

$$\eta \approx 1,8 \times 10^{-4} \text{ P}$$

e

$$\rho \approx 1,3 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$$

de modo que o escoamento de ar é laminar se o módulo da velocidade média de escoamento pelo tubo considerado tiver, no máximo, o valor:

$$v_m \approx \frac{2000 (1,8 \times 10^{-4} \text{ P})}{(1,3 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3)(1 \text{ cm})} \approx 277 \text{ cm/s}$$

Um cálculo análogo mostra que o escoamento de ar pelo mesmo tubo é turbulento se a velocidade média tem módulo $v_m > 415 \text{ cm/s}$.

Conseqüência da Mudança de Regime

Já vimos que, quando um objeto se move em um fluido viscoso com velocidade de módulo relativamente pequeno, no referencial em que o fluido está em repouso, atua sobre ele uma força de arraste cujo módulo é proporcional ao módulo da velocidade. Por outro lado, quando um objeto se move em um fluido viscoso com velocidade de módulo não muito pequeno, atua sobre ele uma força de arraste cujo módulo é proporcional ao quadrado do módulo da velocidade.

Essa mudança no módulo da força de arraste, de uma dependência linear para uma dependência quadrática com o módulo da velocidade do corpo, não é gradual, mas acontece bruscamente e ocorre, para um dado fluido, sempre que o módulo da sua velocidade alcança o mesmo valor crítico, independentemente do aparato de medida.

Além disso, podemos verificar experimentalmente que a mudança no módulo da força de arraste ocorre simultaneamente com a mudança no regime do escoamento no aparato de medida, de laminar para turbulento.

Exercício

A mudança no módulo da força de arraste, da dependência linear para a dependência quadrática com o módulo da velocidade do corpo, ocorre simultaneamente com a mudança no regime do escoamento, de laminar para turbulento. Com base nesse fato, o número de Reynolds pode ser determinado experimentalmente.

Conecte uma mangueira transparente a uma torneira. Abra a torneira o suficiente para que a água escoe com velocidade de módulo pequeno e tenha um escoamento laminar.

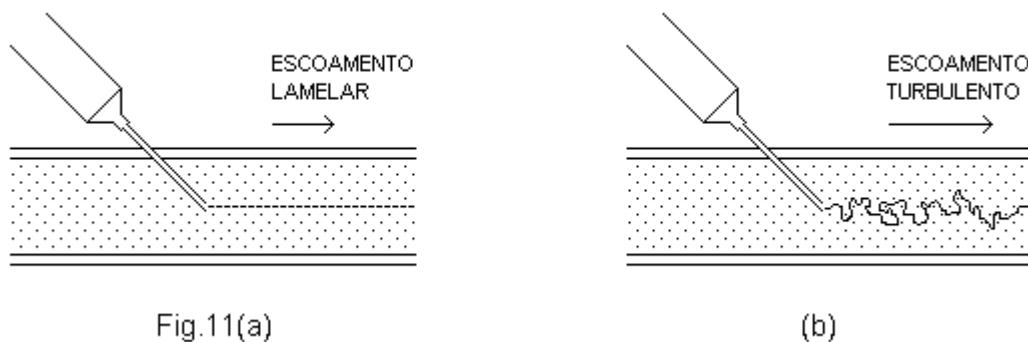


Fig.11(a)

(b)

Com uma seringa, introduza lentamente um líquido colorido (como suco de uva, por exemplo) no centro da mangueira (Fig.11(a)). Como o escoamento é laminar, o fio de líquido colorido que sai da agulha deve ser contínuo e acompanhar a curvatura da mangueira.

Enquanto injeta o líquido colorido no centro da mangueira, vá abrindo cada vez mais a torneira, gradativa e lentamente, até o exato instante em que o regime de escoamento passa de laminar para turbulento (Fig.11(b)). Agora, o fio de líquido colorido é violentamente agitado e sua continuidade é destruída por curvas e vórtices.

Determine, pela medida da vazão, o módulo da velocidade de escoamento da água num referencial fixo na mangueira.

Repita várias vezes todo o procedimento para encontrar um valor médio para o módulo da velocidade de escoamento da água na mangueira.

Sabendo que, para 0 °C, para 20 °C e para 40 °C, o coeficiente de viscosidade da água tem, respectivamente, os valores:

$$\eta = 1,79 \times 10^{-2} \text{ P}$$

$$\eta = 1,01 \times 10^{-2} \text{ P}$$

e

$$\eta = 0,66 \times 10^{-2} \text{ P}$$

faça uma interpolação linear e determine o coeficiente de viscosidade da água à temperatura ambiente.

Com o valor médio v_m do módulo da velocidade de escoamento e com os valores conhecidos do diâmetro interno D da mangueira, da densidade ρ e do coeficiente de viscosidade η da água à temperatura ambiente, calcule o número de Reynolds pela expressão $N_R = D\rho v_m / \eta$.

XI. Tensão Superficial

Nos líquidos, as forças intermoleculares atrativas são responsáveis pelos fenômenos de capilaridade. Por exemplo, a subida de água em tubos capilares e a completa umidificação de uma toalha quando apenas uma ponta fica diretamente mergulhada na água. As forças intermoleculares atrativas são responsáveis também pelos fenômenos de superfície, em que o teorema de Arquimedes é aparentemente violando. Por exemplo, o andar dos insetos sobre a superfície livre da água e a flutuação de uma agulha de aço, muito embora sua densidade seja muito maior do que a densidade da água.

As forças atrativas entre duas moléculas são significativas até uma distância de separação d , que chamamos de alcance molecular. Em geral:

$$d \sim 10^{-7} \text{ cm}$$

Consideremos um líquido em equilíbrio com seu vapor. A resultante das forças atrativas sobre uma molécula qualquer no interior do líquido é, em média, nula porque as demais moléculas estão igualmente distribuídas em todas as direções (Fig.12(a)).

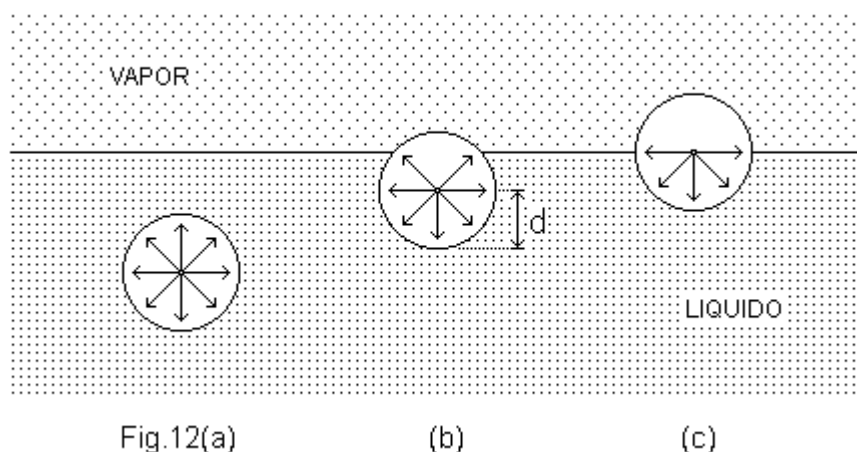


Fig.12(a)

(b)

(c)

Contudo, não é nula a resultante das forças atrativas sobre uma molécula que se encontra a uma distância da superfície do líquido menor do que o alcance molecular (Fig.12(b)). Isto acontece porque o hemisfério de raio d , abaixo da molécula em questão, contém mais moléculas do que o hemisfério de raio d acima dela. A resultante das forças atrativas tem módulo máximo quando a molécula está na superfície livre do líquido (Fig.12(c)). Desse modo, existe uma forte tendência de as moléculas que se encontram dentro de uma camada superficial de espessura d serem puxadas para o interior do líquido e, por isso, a superfície do líquido tende a se contrair espontaneamente nesta direção. Devido a esta tendência de se contrair, o interior de um líquido está sujeito a uma enorme pressão que, para a água, por exemplo, vale cerca de 10^4 atm. Contudo, não existe modo direto (hidrostático) de medir essa pressão.

Se um líquido tem uma interface com seu próprio vapor, cada molécula da camada superficial está submetida a uma força resultante não nula, dirigida para o interior do líquido, devida às demais moléculas.

A superfície livre de um líquido diminui se existe passagem de moléculas da camada superficial para o interior do líquido. Nesse caso, a energia associada ao trabalho que as demais moléculas realizam sobre elas é positiva. A superfície livre de

um líquido aumenta se existe passagem de moléculas do interior do líquido para a camada superficial. Nesse caso, a energia associada ao trabalho que as demais moléculas realizam sobre elas é negativa.

Vamos considerar uma pequena variação ΔA na área da superfície livre de um líquido a temperatura constante. Escrevemos, então, para a energia ΔW associada ao trabalho que as demais moléculas realizam sobre aquelas que provocam essa variação:

$$\Delta W = -\gamma \Delta A$$

Esta expressão define γ , o coeficiente de tensão superficial do líquido. Esse coeficiente está associado às propriedades da camada superficial do líquido em questão. A tabela a seguir mostra alguns valores do coeficiente de tensão superficial para líquidos em contato com o ar.

Substância	Temperatura (°C)	γ (10^{-2} N/m)
Álcool Etilíco	20	2,3
Acetona	20	2,4
Benzeno	20	2,9
Óleo de Oliva	20	3,3
Glicerina	20	5,9
Água	60	6,6
Água	20	7,3
Água	0	7,6
Mercúrio	20	46,5

Quando existe passagem de moléculas do interior do líquido para a camada superficial, a energia associada ao trabalho que as demais moléculas realizam sobre elas é negativa. Por isso, as moléculas da camada superficial têm energia potencial maior do que as moléculas do interior do líquido. Por outro lado, dentre todos os possíveis estados de equilíbrio compatíveis com as restrições que lhe são impostas, um sistema está naquele estado para o qual a energia é mínima. Desse modo, o estado de equilíbrio de um líquido é aquele para o qual a área da superfície livre é a menor possível. Em outras palavras, devem existir forças na superfície livre de um líquido, tangentes a essa superfície, agindo no sentido de reduzir a sua área. Chamamos essas forças de forças de tensão superficial. Então, podemos pensar no coeficiente γ como o módulo da força de tensão superficial por unidade de comprimento.

De modo geral, a intensidade das forças de tensão superficial decresce com o aumento da temperatura. Isso ocorre porque, com maior energia cinética, as moléculas passam menos tempo próximas umas das outras e as forças intermoleculares ficam menos efetivas.

Podemos realizar um experimento muito simples para discutir a atuação das forças de tensão superficial. Tomamos um pedaço de arame com a forma de um anel e o introduzimos em uma solução de água com sabão, de modo que fique recoberto com uma fina película da solução. Colocamos um laço de linha de costura sobre a película e observamos a forma tomada pelo laço (Fig.13(a)).

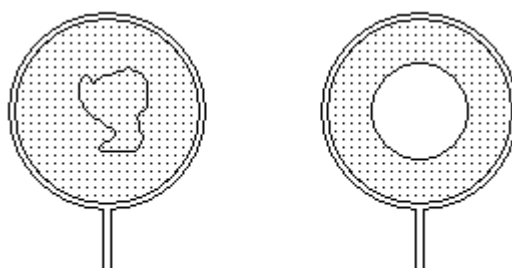


Fig.13(a)

(b)

Então, destruindo a película dentro do laço, podemos observar a forma que ele toma (Fig.13(b)). O laço toma a forma de uma circunferência por efeito das forças de tensão superficial da parte restante da película, que atuam perpendicularmente à linha de costura em todos os seus pontos.

Tomamos, agora, um pedaço de arame mais grosso com a forma de um anel e o introduzimos na solução de água com sabão de modo que também fique recoberto com uma película da solução. Sacudindo rapidamente o arame, podemos produzir bolhas de sabão e observar como cada uma delas, independentemente do seu volume, mais cedo ou mais tarde, toma a forma esférica. A forma esférica de cada bolha é um efeito das forças de tensão superficial, que tendem a minimizar a área da superfície interna e a área da superfície externa da película que forma a gota.

Um experimento como este só pode ser conduzido com líquidos que formam películas. A habilidade de formar películas não está ligada ao valor do coeficiente de tensão superficial, mas à estrutura molecular subjacente. O valor do coeficiente de tensão superficial de uma solução de água e sabão, por exemplo, é aproximadamente 1/3 do valor do coeficiente de tensão superficial da água pura, mas esta última não forma películas estáveis.

A tendência de minimizar a área superficial é característica não apenas de películas líquidas, mas também de amostras líquidas com formas arbitrárias porque está associada à própria existência das forças atrativas entre moléculas. Além disso, como, para um dado volume, o sólido geométrico com a menor área superficial é a esfera, se a energia potencial superficial fosse o único fator a determinar a forma de uma amostra líquida, ela seria esférica.

Tensoativos

A água não molha muito bem as superfícies onde é aplicada. Isso pode ser observado quando enchemos um recipiente e o esvaziamos. O recipiente fica umedecido internamente de forma irregular, apresentando áreas secas e áreas úmidas. Por esse motivo, a capacidade de lavagem da água não é muito grande. Para aumentar sua eficiência na remoção de manchas e sujeiras, podemos adicionar a ela compostos que diminuem sua tensão superficial, favorecendo seu espalhamento e promovendo um contato mais íntimo com a superfície a ser limpa. Estes compostos, chamados de tensoativos, são os principais componentes dos detergentes.

Os tensoativos têm moléculas com cabeça polar e cauda apolar (Fig.14). A cabeça polar é hidrofílica, tem afinidade com as moléculas de água. A cauda apolar é hidrofóbica, tem pouca ou nenhuma afinidade com as moléculas de água.

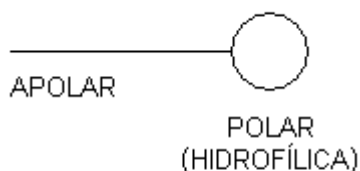


Fig.14

Para poder entender a ação de um tensoativo na redução das intensidades das forças de tensão superficial, vamos analisar a distribuição de suas moléculas numa solução aquosa. No equilíbrio, as moléculas do tensoativo tendem a se concentrar na superfície livre da água, com as cabeças hidrofílicas voltadas para o interior do líquido e as caudas hidrofóbicas voltadas para o exterior (Fig.15(a)).

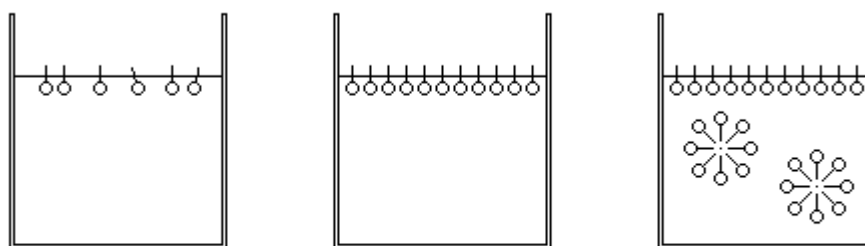


Fig.15(a)

(b)

(c)

Sendo assim, quanto maior a quantidade de tensoativo presente na água, mais afastadas ficam umas das outras, em média, as moléculas de água na superfície livre e, portanto, menores devem ser as intensidades das forças de tensão superficial.

Com a adição de mais tensoativo, a superfície livre da água atinge a saturação (Fig.15(b)). Nesse ponto, as intensidades das forças de tensão superficial atingem seus valores mínimos. Com a adição de ainda mais tensoativo, o restante do líquido atinge a saturação, isto é, a concentração crítica micelar. A partir daí acontece a formação de micelas (Fig.15(c)).

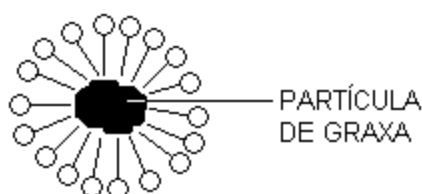


Fig.16

Nas micelas, as caudas hidrofóbicas se voltam para dentro e as cabeças

hidrofílicas, para fora, ficando em contato com as moléculas de água. A forma das micelas depende do tensoativo. Em sua maioria, as micelas são globulares, mas podem ser também elipsoidais, cilíndricas, discoidais e assim por diante.

Por outro lado, a maior parte da sujeira é do tipo graxa. As caudas hidrofóbicas das moléculas do tensoativo presente no detergente se fixam nas superfícies das partículas de graxa e as cabeças hidrofílicas ficam em contato com a água (Fig.16). Assim, as partículas de graxa são afastadas da superfície que sujavam e podem ser removidas pela água corrente.

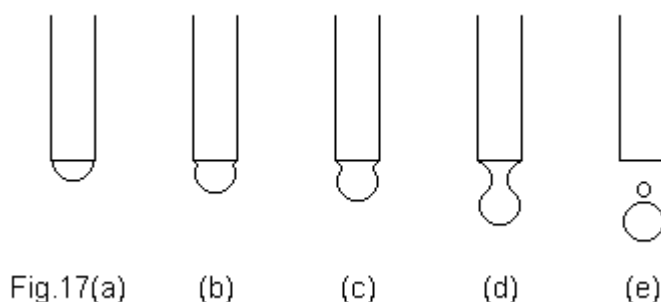
Exercício

Discuta em detalhe a formação de uma bolha de sabão.

XII. Gotas de Líquido

Além das forças intermoleculares, que originam as forças de tensão superficial, atuam, no líquido, forças externas como as forças gravitacionais e as forças associadas à interação das moléculas do líquido com as partículas que formam as paredes do recipiente. A forma tomada pela amostra líquida é determinada pela relação entre estas forças.

As forças gravitacionais, por si próprias, não podem afetar a forma do líquido porque causam as mesmas acelerações em todas as suas moléculas. Isso explica, por exemplo, a forma esférica de uma pequena porção de líquido em queda, numa situação em que a resistência do ar pode ser ignorada. Um líquido apoiado sobre uma superfície horizontal ou que pende de um tubo estreito adquire forma esférica se as forças gravitacionais são pouco importantes. Este é o caso das pequenas gotas. Aqui, a forma do líquido está associada à energia potencial superficial e não à energia potencial gravitacional.



Quando o líquido abandona um tubo estreito, o tamanho da gota gradualmente aumenta até atingir um valor bem definido (Fig.17). Isto ocorre porque, enquanto a gota não é grande o suficiente, as forças de tensão superficial são suficientes para contrabalançar o seu peso e impedir a sua separação do resto do líquido. A gota se separa quando o módulo do seu peso fica igual ao módulo da resultante das forças de tensão superficial. Este fato permite, entre outras coisas, determinar o coeficiente de tensão superficial do líquido em questão.

À medida que a gota toma forma, desenvolve-se um pescoço ligando-a ao resto do líquido. O raio desse pescoço é um pouco menor do que o raio do tubo (Fig.17(b) e (c)). A resultante das forças de tensão superficial que atuam ao longo da circunferência desse pescoço, no momento da separação, deve ter módulo igual ao módulo do peso da gota (Fig.18).

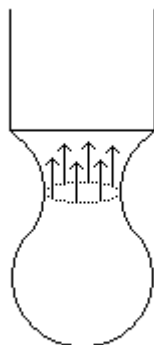


Fig.18

Assim, podemos escrever:

$$2\pi r \gamma = mg$$

em que r é o raio do pescoço e m , a massa da gota.

Sendo assim, medindo a massa da gota e o raio do pescoço no momento da separação, podemos determinar o coeficiente de tensão superficial do líquido de que é feita a gota.

Esse método fornece bons resultados. Contudo, na realidade, uma gota pode não se separar exatamente da forma descrita. No momento em que a gota atinge o tamanho determinado pela expressão acima, o pescoço rapidamente se torna mais estreito (Fig.17(d)) e a gota formada pode vir acompanhada por outra gota, de raio bem menor (Fig.17(e)).

Exercício

Discuta a razão pela qual o conta-gotas de um medicamento não deve ser usado para dosar outro medicamento.

XIII. Influência de um Segundo Meio

A energia potencial superficial de um líquido depende não apenas das propriedades das suas próprias moléculas, mas também das propriedades das moléculas do meio vizinho.

Definimos, acima, o coeficiente de tensão superficial e o relacionamos apenas às propriedades do líquido em questão, tendo em mente um líquido em contato com seu vapor. A energia potencial superficial permanece praticamente a mesma se o meio vizinho for um gás qualquer a baixa pressão porque, nesse caso, a intensidade da interação das moléculas do líquido com as moléculas do gás é muito menor do que a intensidade da interação das moléculas do próprio líquido entre si. As coisas são

diferentes quando o meio vizinho é outro líquido, um sólido ou um gás a alta pressão, da ordem de centenas de atmosferas. Então, o valor do coeficiente de tensão superficial de um líquido vizinho ao seu próprio vapor difere apreciavelmente do valor do coeficiente de tensão superficial desse mesmo líquido vizinho a outra substância mais densa. A tabela a seguir, de coeficientes de tensão superficial a temperatura ambiente, fornece dados para ilustrar esta circunstância.

Substância	γ (10^{-2} N/m)
Água	7,3
Água-Benzeno	3,4
Água-Éter	1,2
Mercúrio	49,0
Mercúrio-Água	42,7
Mercúrio-Álcool	39,9

A inspeção da tabela mostra que a intensidade das forças de tensão superficial na superfície de um líquido em contato com outro líquido é sempre menor do que a intensidade das forças de tensão superficial na superfície de um líquido em contato com seu próprio vapor.

XIV. Interface entre Líquido e Sólido

Vamos considerar as condições na interface entre um líquido e um sólido. A forma tomada pelo líquido é determinada pela relação entre as seguintes forças que atuam nas suas moléculas: as forças gravitacionais, as forças associadas à interação de suas moléculas entre si e as forças associadas à interação de suas moléculas com as partículas do sólido.

A relação entre as forças associadas à interação das moléculas do líquido entre si e as forças associadas à interação delas com as partículas do sólido é caracterizada pelo ângulo de contato θ , entre a superfície livre do líquido e a superfície do sólido, na vizinhança imediata em que as duas se encontram (Fig.19).

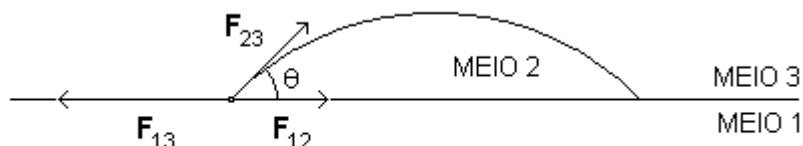


Fig.19

O ângulo de contato é determinado pela condição de equilíbrio: a soma das forças aplicadas em qualquer elemento de comprimento ΔL ao longo da linha de contato dos três meios é nula. Portanto, na direção paralela à superfície do sólido e em módulo:

$$F_{13} = F_{23} \cos\theta + F_{12}$$

Se γ_{13} , γ_{23} e γ_{12} são os correspondentes coeficientes de tensão superficial, podemos tomar:

$$F_{13} = \gamma_{13} \Delta L$$

$$F_{23} = \gamma_{23} \Delta L$$

e

$$F_{12} = \gamma_{12} \Delta L$$

de modo que, da expressão acima, resulta:

$$\cos\theta = \frac{\gamma_{13} - \gamma_{12}}{\gamma_{23}}$$

Esta expressão mostra que $\theta = 0$ no caso em que:

$$\gamma_{23} = \gamma_{13} - \gamma_{12}$$

Fisicamente, isto significa que o líquido se espalha completamente sobre a superfície do sólido, formando uma camada de pequena espessura. Isto também acontece quando:

$$\gamma_{23} < \gamma_{13} - \gamma_{12}$$

O fenômeno do espalhamento completo de um líquido é chamado de molhagem completa. Esse fenômeno acontece com álcool sobre vidro limpo, por exemplo.

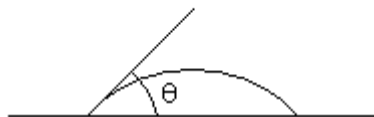


Fig.20(a)



(b)

A expressão acima mostra também que $\theta = \pi$ no caso em que:

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} + \gamma_{23}$$

Fisicamente, isto significa o oposto da molhagem completa, a não-molhagem completa: o líquido não molha de modo algum a superfície do sólido. Esse fenômeno acontece com água sobre parafina.

Casos intermediários de molhagem parcial, em que $\theta < \pi/2$ (Fig.20(a)), e de não-molhagem parcial, em que $\theta > \pi/2$ (Fig.20(b)), são a regra.

A interação das moléculas de um líquido com as partículas de um sólido também afeta a forma da superfície livre do líquido em um recipiente. Se uma grande

quantidade de líquido é colocada dentro de um recipiente amplo, a forma de sua superfície livre é determinada pela interação gravitacional que, naturalmente, assegura uma superfície livre plana e horizontal. Junto às paredes do recipiente, contudo, a superfície livre do líquido é curvada, formando um menisco côncavo, se o líquido molha a parede (Fig.21(a)) e um menisco convexo, se o líquido não molha a parede (Fig.21(b)).

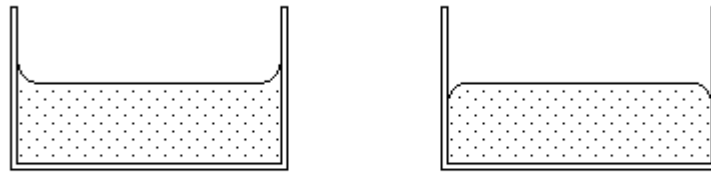


Fig.21(a)

(b)

A propriedade de não-molhabilidade pode tornar possível o fenômeno de flutuação de um corpo em um líquido mesmo nos casos em que a densidade do corpo é maior do que a densidade do líquido. Para discutir essa possibilidade, vamos considerar um líquido que não molha um corpo colocado em contato com ele (Fig.22(a)). Sobre esse corpo, atuam as seguintes três forças verticais: **P**, o peso do corpo, **E**, o empuxo, e **F**, a força associada à curvatura da superfície do líquido em contato com o corpo.

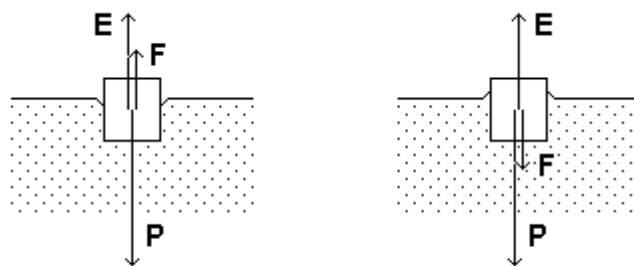


Fig.22(a)

(b)

A força peso aponta para baixo e as outras duas forças apontam para cima. Se o corpo tem forma de barra e está colocado por comprido na superfície do líquido, a força **F** pode ter módulo de valor significativo, já que ele é dado pelo produto do coeficiente de tensão superficial pelo comprimento da linha de contato do corpo com o líquido. Além disso, se o peso do corpo tem módulo pequeno, podemos ter:

$$P = F + E$$

Desse modo, o corpo pode flutuar na superfície do líquido.

Por outro lado, a propriedade de molhabilidade pode tornar possível a submersão de um corpo em um líquido mesmo quando a densidade do corpo é menor do que a densidade do líquido. A discussão desse caso é análoga à discussão do caso anterior, mas devemos levar em conta que, agora, a força peso e a força **F** apontam para baixo e o empuxo aponta para cima (Fig.22(b)).

Exercício 1

Encha um copo com água até quase transbordar. Observe a forma da superfície livre da água.

Então, com um conta-gotas, adicione mais e mais água, até derramar. Descreva o comportamento da superfície livre da água neste processo.

Exercício 2

O fenômeno de flutuação de um corpo em um líquido, mesmo nos casos em que a densidade do corpo é maior do que a densidade do líquido, permite estimar o coeficiente de tensão superficial do líquido.

Coloque uma lâmina de barbear sobre a superfície livre da água contida em um copo, de modo que permaneça sobre a superfície.

Estime o comprimento da linha de contato da lâmina de barbear com a água.

Sabendo que a lâmina é feita de aço, cuja densidade é de cerca de 7 g/cm^3 , estime o valor do coeficiente de tensão superficial da água.

Repita o procedimento com uma agulha.

Exercício 3

O coeficiente de tensão superficial de um líquido que forma película pode ser determinado de modo muito simples, pelo menos em princípio.

Dobre um pedaço de arame em forma retangular e, com outro pedaço, faça uma corrediça (Fig.23).

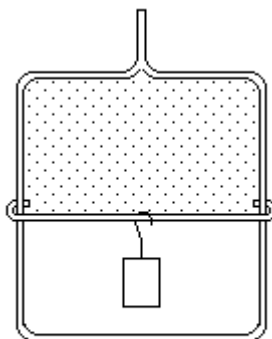


Fig.23

Mergulhe o dispositivo em uma solução de água com sabão e observe o que acontece com a corrediça quando se forma uma película conforme a representação da figura.

A corrediça se move rapidamente num referencial fixo no resto do dispositivo porque as forças de tensão superficial tendem a minimizar as áreas das duas superfícies livres da película.

Suspenda um objeto na corrediça de modo que as forças de tensão superficial sejam balanceadas pelo peso do objeto.

Sem danificar a película, mude a posição da corrediça.

Observe que a corrediça permanece em repouso em qualquer posição, independentemente das áreas das duas superfícies livres da película. Este comportamento é diferente do comportamento de uma membrana de borracha

esticada, que exerce uma força cujo módulo é tanto maior quanto maior são as áreas das suas duas superfícies. Por isso, a analogia usualmente feita entre a superfície livre de um líquido e uma membrana de borracha esticada não pode ser levada muito adiante.

A película possui duas superfícies livres e junto a cada uma delas existe uma camada com espessura equivalente a alguns diâmetros moleculares. Entre as duas camadas existe certa quantidade de líquido. A espessura total da película é muito grande se comparada com o diâmetro molecular.

Quando a corrediça é puxada para baixo, as áreas das superfícies livres da película aumentam, com moléculas passando do interior do líquido para as superfícies. Por isso, com o aumento das áreas, a película não fica esticada como uma membrana de borracha, mas fica mais fina.

O coeficiente de tensão superficial da película é dado pela expressão:

$$\gamma = \frac{mg}{2L}$$

em que L é o comprimento da corrediça e m é a massa do corpo suspenso. O fator 2 aparece porque a película tem duas superfícies livres.

Meça m e L e determine γ para a película de água com sabão.

Exercício 4

Com um conta-gotas, deposite uma gota de água sobre uma superfície de vidro limpa e seca. Descreva o que acontece com a gota.

Molhe a superfície de vidro e deposite outra gota. Descreva o que acontece com esta gota.

Na superfície de vidro novamente seca, deposite uma gota de álcool. Descreva o que acontece com a gota e relacione com as situações anteriores. Tire uma conclusão.

Na superfície de vidro novamente seca, deposite uma gota de água com sabão. Descreva o que acontece com a gota e relacione com as situações anteriores. Tire uma conclusão.

XV. Pressão de Laplace

Em qualquer líquido, as forças de tensão superficial são tangentes à respectiva superfície livre. Se a superfície livre de um líquido é plana, ele está sujeito a uma pressão devida ao meio vizinho. Se a superfície de um líquido é curva, ele fica sujeito a uma pressão devida ao meio vizinho e a uma pressão adicional, chamada de pressão de Laplace, associada à resultante das forças de tensão superficial que atuam nessa superfície curva.

Para discutir a pressão de Laplace vamos considerar, por conveniência, uma gota com forma esférica.

Um aumento no raio da gota implica em um aumento da área da superfície livre e isto, por sua vez, implica em um aumento na energia potencial superficial da gota. Por isso, um aumento no raio da gota só pode ser conseguido se existe trabalho sobre as moléculas que passam do interior do líquido para a superfície.

Inversamente, uma diminuição no raio da gota implica em uma diminuição da área da superfície livre e isto, por sua vez, implica em uma diminuição na energia potencial superficial da gota. Sendo assim, uma diminuição no raio da gota só pode

ser conseguida se as moléculas que passam da superfície para o interior do líquido realizam trabalho. Por isso, a porção de líquido abaixo da superfície livre da gota esférica está sempre comprimida em certa medida, isto é, está sujeita a uma pressão adicional. Essa pressão adicional é a pressão de Laplace.

Para encontrar uma relação que permita calcular a pressão de Laplace, vamos supor que a gota esférica tenha uma redução no seu volume, de V para $V - \Delta V$, por efeito desta pressão (Fig.24). O trabalho de compressão do líquido é feito pelas moléculas da superfície livre e, portanto, leva a uma diminuição da energia potencial superficial.

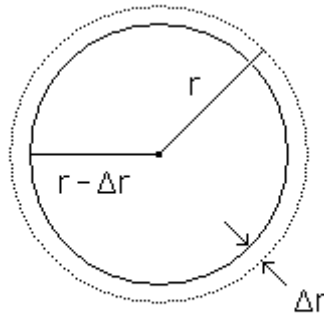


Fig.24

A energia associada ao trabalho das forças de tensão superficial é igual à energia associada ao trabalho de compressão da gota. Essas energias são dadas, respectivamente, pelas expressões:

$$\Delta W = -\gamma \Delta A$$

e

$$\Delta W = -P \Delta V$$

em que ΔA é a variação da área da superfície livre da gota, dada por:

$$\Delta A = 8\pi r \Delta r$$

e ΔV é a variação do volume da gota, dada por:

$$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$$

Dessa maneira, podemos escrever:

$$P(4\pi r^2) \Delta r = \gamma(8\pi r) \Delta r$$

e daí temos, para a pressão de Laplace:

$$P = \frac{2\gamma}{r}$$

A pressão de Laplace não pode ser relacionada diretamente às forças de

tensão superficial porque elas são tangentes à superfície livre do líquido. Contudo, esta pressão aparece, sim, como resultado indireto da ação de tais forças, quando elas atuam nas porções curvas da superfície do líquido (Fig.25). Nesse caso, as forças de tensão superficial, dirigidas tangencialmente à superfície, atuam em qualquer elemento de comprimento da circunferência ABCD. A resultante dessas forças aponta para o centro de curvatura e, relacionada à unidade de área da superfície, dá a pressão adicional que atua no líquido sob a superfície curva.

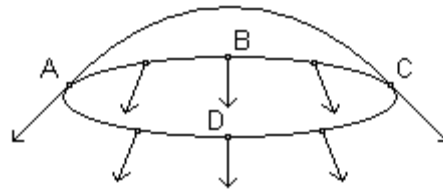


Fig.25

Numa superfície convexa, a resultante das forças de tensão superficial aponta para o interior do líquido e numa superfície côncava, a resultante das forças de tensão superficial aponta para o exterior do líquido. Assim, no primeiro caso, a pressão do líquido é maior do que a pressão normal e, no segundo caso, a pressão do líquido é menor do que a pressão normal.

No caso de uma bolha de sabão, a película tem duas superfícies livres, uma interna e outra externa, em contato com o meio vizinho. Então, a expressão para a pressão de Laplace fica:

$$P = 4\gamma/r$$

Exercício 1

Os efeitos da pressão adicional associada à curvatura da superfície livre de um líquido podem ser observados com um tubo em Y (Fig.26).

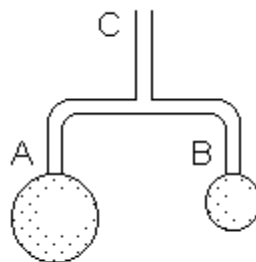


Fig.26

Coloque as extremidades A e B de um tubo em Y dentro de uma solução de água com sabão.

Retire o tubo da solução e produza duas bolhas, soprando na extremidade C. Feche a extremidade C e observe o que acontece.

Devido a circunstâncias aleatórias, as bolhas têm raios diferentes e não estão em equilíbrio. Quando a extremidade C é fechada, a bolha de raio maior se expande e a bolha de raio menor se contrai. Isto mostra que a pressão associada à curvatura da superfície cresce com a diminuição do raio de curvatura.

Exercício 2

Gotas perfeitamente esféricas podem ser produzidas com água, álcool e óleo.

A água é mais densa que o óleo. O álcool é menos denso que o óleo. Misture quantidades apropriadas de água e álcool para produzir um líquido com densidade o mais próximo possível da densidade do óleo.

Com um conta-gotas, deposite gotas de óleo no seio deste líquido. Observe a forma das gotas obtidas e tente explicar a sua esfericidade.

XVI. Capilaridade

A superfície de um líquido colocado em um recipiente tem certa curvatura nas proximidades das paredes, isto é, onde as forças de interação entre as moléculas do líquido e as do recipiente desempenham um importante papel. No restante do líquido, a superfície é plana por efeito da interação gravitacional. Contudo, a influência das paredes do recipiente se estende a toda a superfície livre do líquido quando ela não é grande como, por exemplo, quando o líquido está em um tubo estreito.

Um tubo pode ser considerado estreito e pode ser chamado de tubo capilar quando seu raio interno é da mesma ordem que o raio de curvatura da superfície livre do líquido que contém. Os fenômenos em tais tubos são chamados fenômenos de capilaridade. Além disso, como os capilares são caracterizados pela curvatura da superfície do líquido no seu interior, a influência da pressão de Laplace é a maior possível. Um resultado direto dessa pressão é a ascensão do líquido no capilar.

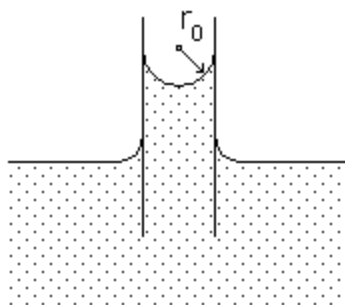


Fig.27

Consideremos um tubo capilar imerso em um amplo recipiente com um líquido que molha suas paredes (Fig.27). O líquido penetra no tubo, forma um menisco côncavo e fica sob o efeito da pressão de Laplace:

$$P = \frac{2\gamma}{r_0}$$

Nesta expressão, γ é o coeficiente de tensão superficial do líquido e r_0 é o raio

de curvatura do menisco.

Como a superfície livre do líquido é côncava, a resultante das forças de tensão superficial aponta para o exterior do líquido, mais especificamente, para o centro de curvatura do menisco. Por isso, o líquido sobe pelo tubo capilar por ação da pressão de Laplace.

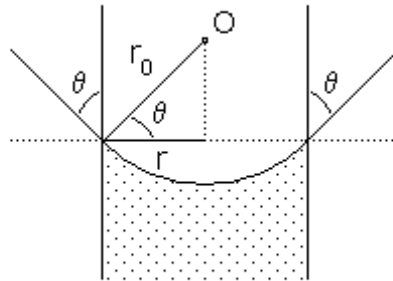


Fig.28

O líquido sobe no interior do tubo capilar até uma altura h , medida a partir do nível da superfície livre do líquido fora do tubo, que pode ser calculada partindo da seguinte igualdade:

$$\frac{2\gamma}{r_0} = \rho gh$$

em que ρ representa a densidade do líquido e g , o módulo da aceleração gravitacional.

Por outro lado, sendo θ o ângulo de contato entre o líquido e as paredes do tubo capilar e r , o raio interno do tubo (Fig.28), podemos ver que:

$$r = r_0 \cos \theta$$

de modo que a expressão anterior fornece:

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g r}$$

Para um líquido que molha completamente as paredes do tubo, $\theta = 0$. Assim, a expressão acima se reduz a:

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r}$$

Como poderíamos ter esperado, a altura de ascensão do líquido no tubo capilar é tanto maior quanto maior é o seu coeficiente de tensão superficial. Além disso, a altura de ascensão do líquido no tubo capilar é tanto maior quanto menor é o raio interno do tubo.

Se o líquido não molha as paredes do tubo capilar, temos a situação inversa: o menisco é convexo, a resultante das forças de tensão superficial aponta para o interior do líquido, mais especificamente, para o centro de curvatura do menisco. Por isso, a

pressão de Laplace faz com que a superfície livre do líquido no capilar fique abaixo da superfície livre do líquido fora do tubo (Fig.29). Neste caso, h é a profundidade do menisco, medida a partir do nível da superfície livre do líquido fora do tubo. De qualquer modo, a profundidade h é dada pelas mesmas duas expressões acima.

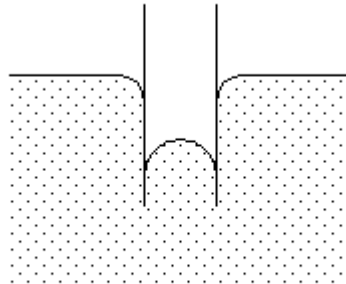


Fig.29

Exercício 1

O coeficiente de tensão superficial de um líquido pode ser determinado através do fenômeno de capilaridade.

Encha um copo com água e coloque tubos capilares com diferentes diâmetros internos na região central do copo.

Meça os diâmetros internos dos tubos capilares e as respectivas alturas das colunas de água no interior deles.

A densidade da água é de 10^3 kg/m^3 e o módulo da aceleração da gravidade é de $9,8 \text{ m/s}^2$.

Supondo que a água molhe completamente as paredes dos tubos capilares, de modo que valem as relações acima, determine o coeficiente de tensão superficial da água para cada tubo capilar e, daí, calcule o valor médio.

Exercício 2

Xilema é um sistema de tubos capilares, presentes no interior das plantas, que transportam água com sais minerais desde a raiz até as folhas. O diâmetro interno desses tubos é da ordem de 10^{-5} m . Supondo que a água molhe completamente as paredes desses tubos, calcule a altura que ela pode alcançar no seu interior por capilaridade.

FLUIDOS IDEAIS

I. Introdução

Fluidos são corpos cujas moléculas não guardam suas posições relativas tomando, assim, a forma do recipiente. Além disso, em condições favoráveis, escoam.

Os fluidos são constituídos por um grande número de moléculas em movimento desordenado e em constantes colisões. Para ser exato na análise de qualquer fenômeno que envolva fluidos, devemos considerar a ação de cada molécula ou grupo de moléculas. Tal procedimento é adotado na Teoria Cinética e na Mecânica Estatística e é muito laborioso sob o ponto de vista matemático. Em se tratando de estabelecer relações entre grandezas macroscópicas associadas ao escoamento de fluidos, contudo, podemos substituir o meio molecular real por um meio contínuo, hipotético, facilitando o tratamento matemático. De qualquer modo, a idéia do contínuo deve ser usada apenas nos casos em que conduz a uma descrição razoavelmente aproximada dos fenômenos em questão. Não pode, por exemplo, ser usada na descrição da tensão superficial porque as dimensões características do fenômeno são da ordem do livre caminho médio das moléculas que constituem o fluido. Assim, vamos restringir, agora, ao estudo dos fluidos ignorando os fenômenos de tensão superficial, capilaridade e viscosidade e tomando os fluidos como incompressíveis. Em outras palavras, fluidos ideais e, quando for o caso, em regime de escoamento estacionário.

A Hidrostática estuda os fluidos em repouso num referencial fixo no recipiente que os contém, considerando o equilíbrio das pressões que atuam em qualquer elemento de volume.

A Hidrodinâmica estuda os fluidos em movimento num referencial fixo na tubulação pela qual eles escoam. Contudo, como esse estudo é complexo e difícil, envolvendo matemática avançada, vamos estudar os fenômenos que podem ser descritos apenas com os princípios de conservação da massa e da energia, o primeiro levando à equação da continuidade e o segundo, à equação de Bernoulli.

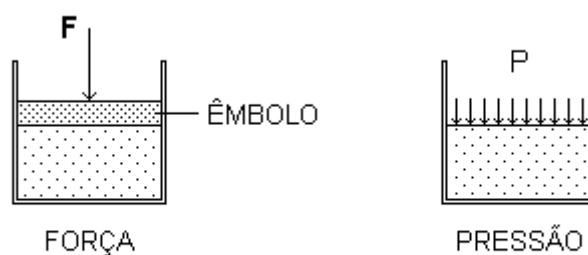


Fig.1

II. Pressão

Um sólido, sendo rígido, pode experimentar a ação de uma força que atue sobre um ponto. Um fluido, contudo, só experimenta a ação de uma força através de uma superfície. Assim, a grandeza relevante aqui é a pressão, definida como o cociente do módulo da força normal pela área da superfície sobre a qual atua:

$$P = \frac{F}{A}$$

Para dar a idéia de atuação sobre um único ponto, uma força é representada por uma flecha (Fig.1). Para dar a idéia de atuação sobre todos os pontos de uma superfície, uma pressão é representada por várias flechinhas.

No SI, a unidade de pressão é o pascal:

$$1\text{Pa} = \text{N}/\text{m}^2$$

Outras unidades são também usuais, como o bar, a atm (atmosfera) e o hectopascal:

$$1\text{bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1\text{atm} \approx 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$$

e

$$1\text{hPa} = 10^2 \text{ Pa}$$

Para discutir o conceito de pressão, vamos considerar uma atividade bastante simples, com uma esfera de aço, um tubo pelo qual a esfera possa passar, uma barra de sabão e alguns pregos sem ponta, de mesmo comprimento, mas diâmetros diferentes (Fig.2).

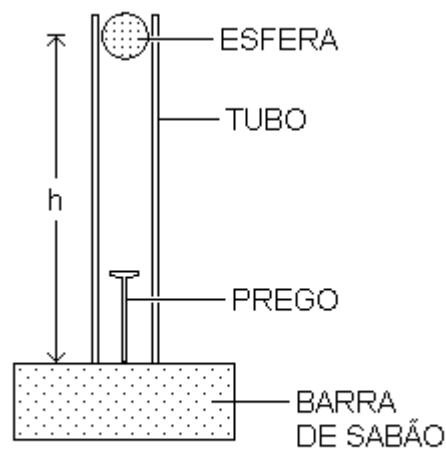


Fig.2

Abandonando a esfera sempre da mesma altura h , podemos observar que pregos de diferentes diâmetros penetram até profundidades diferentes na barra de sabão. Usamos pregos de mesmo comprimento e abandonamos a esfera sempre da mesma altura para garantir que a esfera transfere a mesma quantidade de movimento a todos os pregos, ou seja, para garantir que a esfera exerce forças de mesmo módulo sobre todos os pregos, pelo menos aproximadamente. Desse modo, as diferentes profundidades de penetração dos pregos na barra de sabão devem ser atribuídas às diferentes áreas das suas seções retas. Os pregos de menor diâmetro exercem maiores pressões na barra de sabão e, por isso, penetram a maiores profundidades.

Por outro lado, abandonando a esfera de diferentes alturas, podemos observar

que pregos de mesmo diâmetro penetram até profundidades diferentes na barra de sabão. Abandonando a esfera de diferentes alturas garantimos que ela transfere diferentes quantidades de movimento aos pregos, ou seja, garantimos que ela exerce forças de módulos diferentes sobre os pregos, pelo menos aproximadamente. Desse modo, as diferentes profundidades de penetração dos pregos devem ser atribuídas às forças de diferentes módulos. Os pregos sobre os quais a força aplicada tem módulo maior exercem maiores pressões na barra de sabão e, por isso, penetram a maiores profundidades.

Exercício

Discuta o seguinte fato do cotidiano: para caminhar sobre a areia da praia, sapatos de salto alto não são tão eficientes quanto tênis.

III. Densidade

Definimos a densidade (ou massa específica) de um corpo como o cociente de sua massa pelo seu volume:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

No SI, a unidade de densidade é kg/m^3 . Outra unidade usual é g/cm^3 .

A tabela a seguir mostra a densidade de algumas substâncias quando sua temperatura é de 0°C , a menos que outra temperatura seja indicada.

Substância	ρ (10^3 kg/m^3)
Gasolina (15°C)	0,74
Etanol	0,79
Gelo	0,92
Água (4°C)	1,03
Glicerina	1,26
Alumínio	2,70
Ferro	7,87
Mercúrio	13,60
Ouro	19,30

Exercício 1

Determine a massa de um balão graduado. Coloque água neste balão, anotando o correspondente volume e determine a

massa do balão com a água dentro.

Com os números obtidos, calcule a densidade da água.

Exercício 2

O volume de um corpo de forma regular, como um cubo ou um cilindro, por exemplo, pode ser obtido pela medida direta de suas dimensões. O volume de um corpo de forma irregular pode ser determinado pelo aumento aparente no volume de um líquido onde ele é mergulhado.

Determine a massa de alguns objetos do seu uso cotidiano.

Determine os volumes desses objetos usando uma proveta com água.

Com os números obtidos, calcule as densidades desses objetos.

Exercício 3

Discuta em que condições as densidades determinadas no exercício anterior são idênticas às densidades das substâncias de que são feitos os objetos.

Exercício 4

Um recipiente cilíndrico, com 5 cm de diâmetro e 14 cm de altura, está completamente cheio de glicerina. Ambos são mantidos a 0 °C. (a) Calcule o módulo do peso da glicerina. (b) Calcule a pressão exercida pela glicerina no fundo do recipiente.

IV. Experimento de Torricelli

A Terra está envolvida por uma camada de ar, a atmosfera. A pressão exercida pela atmosfera sobre a superfície da Terra é chamada de pressão atmosférica (P_A). A pressão atmosférica está associada ao peso da atmosfera.

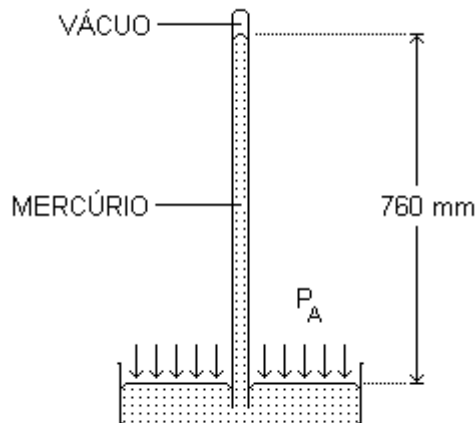


Fig.3

Podemos medir a pressão atmosférica com o experimento de Torricelli. Embrucamos um tubo de vidro com cerca de 1 m de comprimento, fechado em uma das extremidades e cheio de mercúrio, em um recipiente que também contém

mercúrio, sem deixar entrar ar no tubo (Fig.3). A coluna de mercúrio no interior do tubo permanece com uma altura de aproximadamente 760 mm, sustentada pela pressão atmosférica na superfície livre do recipiente. Em outras palavras, a pressão atmosférica é equivalente à pressão de uma coluna de mercúrio de 760 mm de altura, ao nível do mar, a 0 °C e em um local onde o módulo da aceleração gravitacional tem o valor $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Escrevemos simbolicamente:

$$P_A = 760 \text{ mmHg} = 1 \text{ atm}$$

A pressão atmosférica pode ser calculada pela expressão:

$$P_A = \frac{m_{\text{Hg}}g}{A} = \frac{\rho_{\text{Hg}} Vg}{A} = \rho_{\text{Hg}}gh$$

em que m_{Hg} é a massa da coluna de mercúrio com seção reta de área A , V é o volume da coluna e ρ_{Hg} é a densidade do mercúrio. Como:

$$\rho_{\text{Hg}} = 13,60 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

temos, ao nível do mar:

$$P_A = (13,60 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9,81 \text{ m/s}^2)(0,76 \text{ m}) = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Exercício 1

(a) Discuta o que faz o refrigerante subir pelo interior de um canudinho ao se fazer sucção (Fig.4(a)). (b) Discuta a possibilidade de sugar, com um canudinho, o refrigerante contido em um recipiente fechado (Fig.4(b)).



Fig.4(a)



(b)

Exercício 2

A pressão atmosférica pode ser medida com uma versão do experimento de Torricelli em que o mercúrio é substituído por água.

Anote a temperatura ambiente.

Encha uma mangueira com 13 m de comprimento com água. Feche uma das

extremidades e eleve-a verticalmente, colocando a outra extremidade em um copo com água.

Meça a altura da coluna de água após o equilíbrio ter sido alcançado.

Exercício 3

Discuta a unidade prática de pressão chamada de metro de água.

V. Teorema Fundamental da Hidrostática

O teorema fundamental da Hidrostática estabelece que a pressão em um fluido em equilíbrio, com densidade constante, varia linearmente com a profundidade.

Para demonstrar esse teorema, vamos considerar uma porção imaginária de fluido em forma de cilindro circular reto, com seção reta de área A , altura h e face superior em contato com a atmosfera (Fig.5). Para todos os efeitos, essa porção de fluido mantém sua forma cilíndrica como se fosse um corpo rígido e, por isso, tem sentido falarmos nas forças que atuam nele.

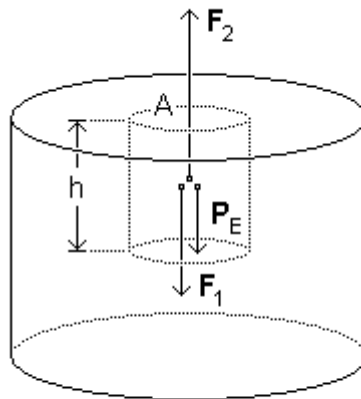


Fig.5

A atmosfera exerce pressão na face superior do cilindro imaginário e causa o aparecimento da força F_1 . A porção de fluido abaixo da face inferior do cilindro imaginário exerce nela uma pressão e causa o aparecimento da força F_2 . Desse modo temos, em módulo:

$$F_1 = AP_A$$

e

$$F_2 = AP(h)$$

em que $P(h)$ é a pressão no interior do fluido a uma profundidade h . Além disso, a Terra exerce, no cilindro imaginário, a força peso P_E , de módulo:

$$P_E = mg = \rho Ahg$$

em que ρ é a densidade do fluido.

O fluido está em equilíbrio, isto é, em repouso num referencial fixo no recipiente que o contém. Então, a porção de fluido em forma de cilindro que estamos considerando também está em repouso nesse referencial e podemos escrever, em módulo:

$$F_2 = F_1 + P_E$$

Pelas expressões acima, vem:

$$AP(h) = AP_A + \rho Ahg$$

e finalmente:

$$P(h) = P_A + \rho gh$$

Portanto, a pressão em um fluido em equilíbrio varia linearmente com a profundidade.

Paradoxo Hidrostático

Consideremos recipientes de formas diferentes, mas com bases de mesma área, todos com líquidos idênticos até a mesma altura (Fig.6).

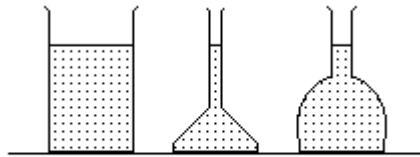


Fig.6

As quantidades de líquido nos recipientes são diferentes e, por isso, os respectivos pesos têm diferentes módulos. Contudo, como as alturas são iguais, as pressões nas bases dos recipientes são iguais.

Exemplo 1

A experiência cotidiana nos mostra que a superfície livre de um líquido é plana e horizontal.

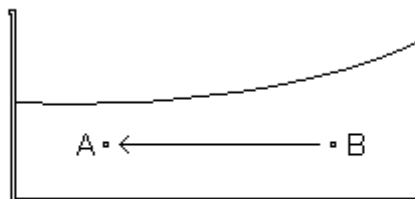


Fig.7

Para entender porque isso é assim, consideremos a hipótese contrária, isto é, que a superfície livre de um líquido não é plana nem horizontal (Fig.7). Então, dois pontos, A e B, localizados sobre a mesma linha horizontal, no interior do líquido, estão a profundidades diferentes. Pelo teorema fundamental da Hidrostática, são diferentes as pressões em elementos de área ao redor desses pontos e, devido à diferença de pressão, há fluxo de líquido da região ao redor de B para a região ao redor de A.

Podemos concluir, disso tudo, que se a superfície livre de um líquido não é plana nem horizontal, ele não pode estar em equilíbrio. Alternativamente, podemos concluir que se um líquido está em equilíbrio, a sua superfície livre é plana e horizontal.

Exemplo 2

A água, preenchendo, sem bolhas de ar, uma mangueira, apresenta-se no mesmo nível nas suas duas extremidades (Fig.8). Esse fato permite determinar se dois pontos do espaço estão no mesmo nível, isto é, sobre a mesma linha horizontal.

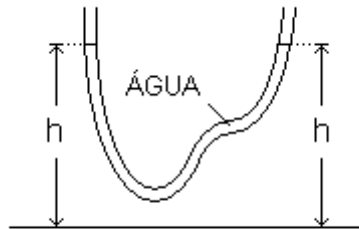


Fig.8

Tome um pedaço de mangueira transparente e encha-o com água. Cuide para que não haja bolhas de ar no líquido.

Verifique o nível dos marcos de duas portas, dos azulejos em uma parede e de outros pontos que você achar interessante.

Exercício 1

A variação linear da pressão com a profundidade em um líquido em equilíbrio pode ser verificada com um arranjo simples (Fig.9).

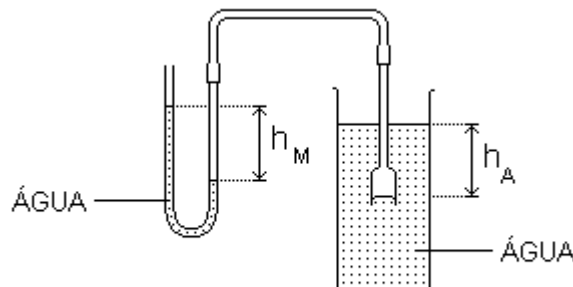


Fig.9

Use um tubo em U com água como medidor de pressão.
 Conecte o tubo em U a uma campânula por meio de uma mangueira flexível.
 Encha uma proveta com água.
 Introduza a campânula na água da proveta até certa profundidade (h_A) e anote a diferença de nível da água no tubo em U (h_M).
 Repita o procedimento para várias profundidades.
 Uma coluna de 10,34 m de água corresponde a uma pressão de $1,01 \times 10^5$ Pa.
 Com esse dado, complete a tabela a seguir.

h_A (cm)	h_M (cm)	$[P(h_A) - P_A]$ (Pa)
5		
10		
15		
20		
25		

Construa o gráfico $P(h_A) - P_A$ contra h_A e verifique se os pontos podem ser ajustados por uma reta.

A partir do gráfico, determine a densidade da água. Compare o valor obtido com o valor aceito nos livros de Física.

Exercício 2

Considere dois líquidos não miscíveis, com densidades ρ_1 e ρ_2 , em um tubo em U (Fig.10). Como a pressão no nível N, que passa pela superfície de separação entre os dois líquidos, é a mesma nos dois ramos do tubo em U, o teorema fundamental da hidrostática fornece:

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

Assim, se a densidade de um dos líquidos é conhecida e se as alturas das colunas no tubo em U forem medidas, a densidade do outro líquido pode ser determinada.

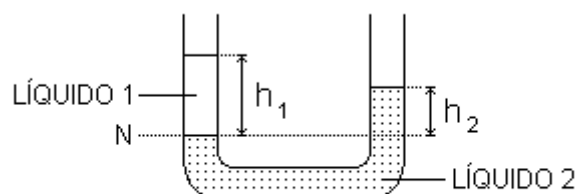


Fig.10

Coloque azeite e água em um tubo em U, começando pela água, que se supõe ser o líquido mais denso. Ao colocar o azeite, faça-o lentamente, pelas paredes do tubo, de modo que ele não se misture com a água.

Meça as alturas das colunas acima do ponto de separação dos líquidos e calcule a densidade do azeite com os números obtidos.

Exercício 3

O procedimento desenvolvido no exercício anterior não pode ser usado quando os líquidos são miscíveis. Para estes, é conveniente usar um procedimento baseado no uso de um tubo em Y invertido (Fig.11).

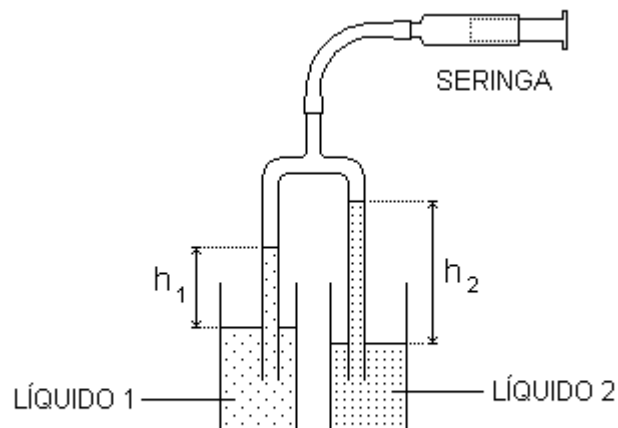


Fig.11

Coloque água (líquido 1) em um recipiente. Coloque álcool (líquido 2) em outro recipiente.

Mergulhe cada ramo de um tubo em Y invertido em um dos líquidos e aspire o ar do tubo usando uma seringa conectada ao terceiro ramo por uma mangueira flexível.

Mostre que, na situação descrita, o teorema fundamental da hidrostática fornece:

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

Meça as alturas das colunas de água e de álcool nos ramos do tubo em Y e calcule a densidade do álcool.

Exercício 4

A pressão da água em uma torneira localizada no segundo andar de um edifício é de 20 N/cm^2 . Calcule a pressão da água em outra torneira, localizada no primeiro andar, 3 m abaixo da primeira.

VI. Variação da Pressão Atmosférica com a Altitude

Considerando a atmosfera como um gás ideal em equilíbrio, com a mesma temperatura em todos os pontos, a equação de estado dos gases ideais permite escrever:

$$\rho(h) = kP(h)$$

em que k é uma constante e $\rho(h)$ e $P(h)$ representam, respectivamente, a densidade e a pressão a uma altitude h . Esta expressão mostra que a densidade da atmosfera não é constante, mas varia com a altitude.

Podemos calcular a constante k particularizando a expressão acima para o nível do mar, ou seja, para $h = 0$. Portanto:

$$k = \frac{\rho_0}{P_A}$$

Se a altitude h é muito menor do que o raio da Terra, de modo que o módulo da aceleração gravitacional pode ser considerado constante e igual a g_0 , seu valor ao nível do mar, então a pressão atmosférica é dada por:

$$P(h) = P_A e^{-kg_0h}$$

Portanto, a pressão atmosférica diminui exponencialmente com a altitude.
A 25 °C:

$$\rho_0 = 1,18 \text{ kg/m}^3$$

e

$$P_A = 1,01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

de modo que:

$$kg_0 = \left(\frac{1,18 \text{ kg/m}^3}{1,01 \times 10^5 \text{ N/m}^2} \right) (9,81 \text{ m/s}^2) = 1,15 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1} = 0,115 \text{ km}^{-1}$$

No topo do monte Everest, por exemplo, a cerca de 8,84 km de altitude, a pressão atmosférica é:

$$P(8,84 \text{ km}) = P_A e^{-(0,115 \text{ km}^{-1})(8,84 \text{ km})} \approx 0,36 P_A$$

Portanto, no topo do monte Everest, o valor da pressão atmosférica é aproximadamente 36% do seu valor ao nível do mar.

Exercício

Em termos médios, uma pessoa que passa sua vida numa localidade a grande altitude desenvolve uma capacidade pulmonar maior do que uma pessoa que passa sua vida numa localidade ao nível do mar. Discuta esse fato.

VII. Teorema de Pascal

Vamos considerar um fluido homogêneo em equilíbrio, isto é, em repouso num referencial fixo no recipiente que o contém. Então, o teorema fundamental da Hidrostática garante que a diferença de pressão entre dois elementos de superfície horizontais quaisquer desse fluido é constante e depende apenas do desnível entre eles. Desse modo, uma variação de pressão produzida em um elemento de superfície do fluido se transmite integralmente a todos os outros elementos de superfície. Este resultado constitui o teorema de Pascal.

Uma aplicação importante do teorema de Pascal se dá na máquina simples que chamamos de prensa hidráulica. Uma prensa hidráulica é formada por dois cilindros comunicantes com êmbolos de massas desprezíveis que confinam um fluido incompressível em equilíbrio (Fig.12).

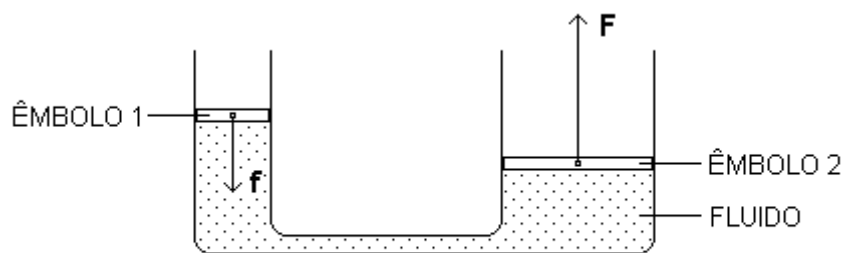


Fig.12

Suponhamos que, no êmbolo 1, com seção reta de área a e que pode deslizar sem atrito no cilindro de menor diâmetro, a vizinhança exerça uma força f . Como esse êmbolo tem massa desprezível, ele exerce, no fluido, uma pressão dada por:

$$P = \frac{f}{a}$$

Pelo teorema da Pascal, esta pressão se transmite integralmente a todos os elementos de superfície do fluido, inclusive àqueles em contato com o êmbolo 2, que tem seção reta de área A e que pode deslizar sem atrito no cilindro de maior diâmetro. Assim, sobre o êmbolo 2 atua uma força F de módulo:

$$F = PA$$

ou:

$$F = \left(\frac{A}{a}\right) f$$

Como esse êmbolo tem massa desprezível, ele exerce uma força igual a F sobre a vizinhança. Como $A > a$, segue-se que $F > f$. Por isso, dizemos que a prensa hidráulica multiplica forças.

Exercício 1

Uma prensa hidráulica tem êmbolos com seções retas de áreas $A_1 = 20 \text{ cm}^2$ e $A_2 = 300 \text{ cm}^2$. Calcule o módulo da força que o êmbolo 2 exerce sobre a vizinhança quando uma força com módulo de 100 N é aplicada ao êmbolo 1.

Exercício 2

Considere a prensa hidráulica do exercício anterior. (a) Calcule o módulo do deslocamento do êmbolo 2 sabendo que o módulo do deslocamento do êmbolo 1 é de 12 cm. (b) Discuta a conservação da energia na operação dessa prensa hidráulica.

VIII. Teorema de Arquimedes

Podemos enunciar o teorema de Arquimedes da seguinte forma: um corpo total ou parcialmente mergulhado em um fluido em equilíbrio recebe dele uma força (chamada empuxo) vertical, de baixo para cima, de módulo igual ao módulo do peso da quantidade de fluido deslocado pelo corpo.

Para demonstrar esse teorema, consideremos um corpo cilíndrico, com seção reta de área A , altura h , imerso em um fluido em equilíbrio, com densidade ρ (Fig.13).

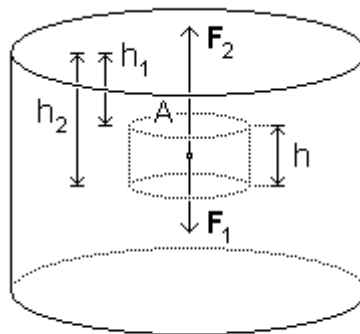


Fig.13

Por simetria, a resultante das forças horizontais que o fluido exerce sobre o corpo é nula. Na vertical, o fluido exerce, sobre o corpo, as forças F_1 e F_2 , com módulos:

$$F_1 = (P_A + \rho g h_1) A$$

e

$$F_2 = (P_A + \rho g h_2) A$$

de modo que o módulo da resultante das forças verticais que o fluido exerce sobre o corpo é:

$$E = F_2 - F_1 = \rho g (h_2 - h_1) A = \rho g h A$$

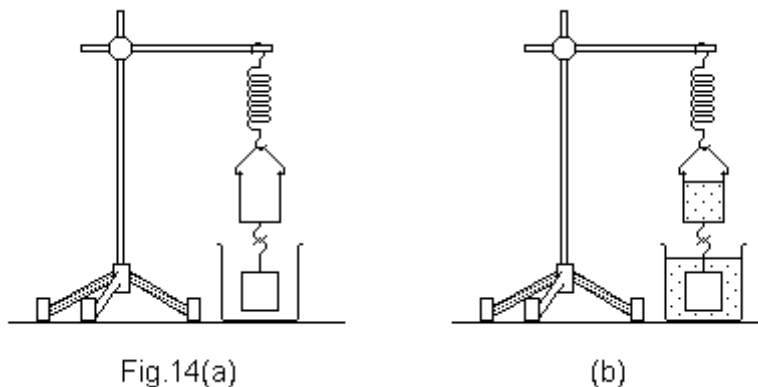
Agora, hA é o volume do corpo imerso, ρhA é a massa e ρhAg é o módulo do peso da quantidade de fluido deslocado pelo corpo.

Portanto, como a resultante das forças horizontais que o fluido exerce sobre o corpo é nula, a direção do empuxo é vertical. Como $h_2 > h_1$, a pressão do fluido a profundidade h_2 é maior do que a pressão do fluido a profundidade h_1 e o sentido do empuxo é de baixo para cima. Além disso, pela expressão acima, o módulo do empuxo é igual ao módulo do peso da quantidade de fluido deslocado pelo corpo.

O resultado final não depende da forma do corpo imerso e, por isso, podemos supor que ele seja válido qualquer que seja a forma do corpo.

Exemplo 1

Podemos determinar o módulo do empuxo que atua sobre um corpo com um suporte, uma mola, um recipiente cilíndrico e outro recipiente qualquer (Fig.14).



Suspendemos o recipiente cilíndrico na mola, suspendemos o corpo nesse recipiente e posicionamos o segundo recipiente de modo que o corpo fique dentro dele (Fig.14(a)). Nessa situação, anotamos a elongação da mola.

Então, colocamos água no segundo recipiente até que o corpo fique submerso e, na seqüência, colocamos água no recipiente suspenso na mola até que ela fique com a mesma elongação da primeira situação (Fig.14(b)).

Como a elongação é a mesma, as forças que os conjuntos suspensos na mola exercem sobre ela têm módulos iguais nas duas situações. Isto significa que o módulo do peso da água colocada no recipiente cilíndrico é igual ao módulo do empuxo que atua no corpo submerso e podemos escrever:

$$E = \rho Vg$$

em que ρ é a densidade da água, V é o volume de água no recipiente cilíndrico e g é o módulo da aceleração gravitacional. Portanto, determinando o volume V podemos calcular o módulo do empuxo que atua no corpo submerso.

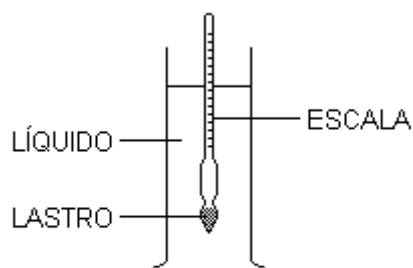


Fig.15

Exemplo 2

Densímetro é um dispositivo usado para medir, de modo direto, a densidade dos líquidos. Um densímetro típico é feito com um tubo de vidro fechado, com forma característica (Fig.15).

Quando o densímetro flutua livremente num líquido, a superfície livre do líquido indica sua densidade diretamente na escala graduada.

Um densímetro é calibrado para medir densidades dentro de certa faixa de valores. Para medir densidades dentro de outras faixas de valores precisamos de outros densímetros, calibrados apropriadamente. A calibragem está baseada na quantidade de lastro colocada em cada densímetro. Usualmente, o lastro é composto de minúsculas esferas de chumbo.

Diabretes de Descartes

Diabretes de Descartes são ampolas parcialmente preenchidas com gás, colocadas no interior de um recipiente fechado, cujo volume interno está completamente ocupado por um líquido. Como exemplo prático, podemos considerar o recipiente como sendo uma garrafa plástica de refrigerante, o líquido como sendo água e o gás como sendo ar (Fig.16).

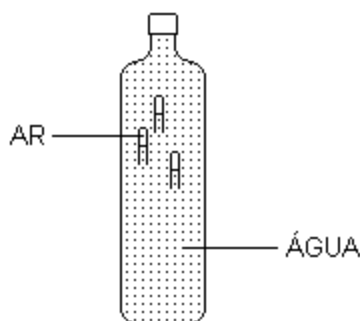


Fig.16

Devido ao seu conteúdo de ar, as ampolas ficam com as aberturas voltadas para baixo e conforme a quantidade de ar, as ampolas atingem o equilíbrio em diferentes posições no interior da garrafa. Por isso, vamos supor que a quantidade de ar em cada ampola é tal que ela atinge o equilíbrio numa posição nas proximidades da tampa da garrafa.

Para a discussão que se segue, vamos usar a palavra ampola para o objeto de vidro ou plástico em conjunto com o seu conteúdo de ar e água.

No equilíbrio, o módulo do peso de cada ampola é igual ao módulo do respectivo empuxo.

Agora, exercendo forças sobre a parede da garrafa, com os dedos das mãos, observamos que as ampolas passam a ocupar posições mais próximas do fundo da garrafa e diminuindo as intensidades dessas forças, as ampolas voltam a ocupar posições mais próximas da tampa.

Quando exercemos forças sobre a parede da garrafa, estamos produzindo acréscimos de pressão nas regiões da água em contato com a parede. Pelo teorema de Pascal, esses acréscimos de pressão se transmitem integralmente a todas as outras regiões da água no interior da garrafa, inclusive às interfaces água-ar no interior das ampolas. Com isso, diminui o volume de ar e aumenta o volume de água no interior de cada ampola e, como conseqüência, aumenta o módulo do peso de cada ampola sem que aumente o módulo do correspondente empuxo. A resultante das forças que atuam em cada ampola fica diferente de zero e aponta para baixo, fazendo com que a ampola se movimente nesse sentido, aproximando-se do fundo da garrafa.

Quando diminuimos as intensidades das forças exercidas pelos dedos das mãos sobre a parede da garrafa, desaparecem os acréscimos de pressão na água, o volume do ar no interior de cada ampola volta ao valor original e o excesso de água abandona a ampola, o peso volta a ser equilibrado pelo empuxo e a ampola retorna à posição original, mais próxima da tampa da garrafa.

Exercício 1

Um corpo maciço flutua com 75% do seu volume dentro da água. Calcule a densidade da substância de que é feito esse corpo.

Exercício 2

Numa situação, um recipiente com água está sobre uma balança. Numa outra situação, o mesmo recipiente com água está sobre a balança, mas uma pedra, suspensa por um fio, é mergulhada na água, sem tocar o recipiente. Compare e discuta a indicação da balança nas duas situações.

Exercício 3

Com uma mola calibrada, um estudante de Física encontrou, para a massa de um anel, o valor $m = 0,039$ kg. Com a mesma mola, mas com o anel suspenso por um fio e colocado dentro de um recipiente com água, sem tocar no fundo, o estudante encontrou o valor $m^* = 0,037$ kg. Com esses dados, calcule a densidade da substância de que é feito o anel e descubra se ele pode ser de ouro.

IX. Equação da Continuidade

Quando todos os elementos de volume do fluido que passam por um ponto qualquer dentro do tubo o fazem sempre com a mesma velocidade, num referencial fixo no tubo, o escoamento é chamado de estacionário, laminar ou lamelar. Em pontos diferentes, as velocidades dos elementos de volume podem ser diferentes. Um escoamento estacionário pode ser conseguido se o fluido se desloca com velocidade de módulo relativamente pequeno.

Consideremos, então, um fluido de densidade ρ constante, em escoamento estacionário numa tubulação sem derivações (Fig.17).

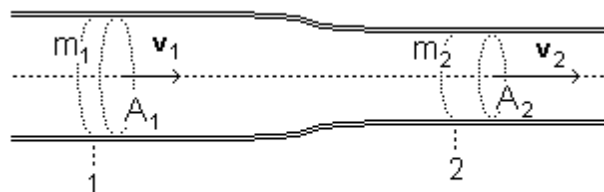


Fig.17

As massas das quantidades de fluido que escoam através das seções 1 e 2, de áreas A_1 e A_2 , durante o intervalo de tempo Δt são:

$$m_1 = \rho A_1 v_1 \Delta t$$

e

$$m_2 = \rho A_2 v_2 \Delta t$$

em que v_1 e v_2 são os módulos das velocidades do fluido nas seções 1 e 2, respectivamente.

Como não existem derivações, $m_1 = m_2$, de modo que:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

ou

$$Av = \text{constante}$$

Esta é a equação da continuidade e expressa, na Hidrodinâmica, a conservação da massa para um fluido com densidade constante.

Chamamos de vazão o quociente do volume de fluido que escoa através de uma seção reta do tubo pelo intervalo de tempo correspondente:

$$Q = \frac{V}{\Delta t}$$

Como a vazão pode também ser escrita:

$$Q = Av$$

a equação da continuidade fica:

$$Q = \text{constante}$$

Exemplo

Consideremos a água que sai de uma torneira e se move para baixo, na direção vertical. Por efeito da interação gravitacional, o módulo da velocidade de escoamento da água aumenta, enquanto ela se afasta da torneira, num referencial fixo no solo. Então, pela equação da continuidade, à medida que o módulo da velocidade aumenta, a área da seção reta do jato de água diminui.

Exercício 1

Uma mangueira tem uma extremidade ligada a uma torneira aberta. Um jato de água sai da outra extremidade. Para que o jato de água tenha um alcance maior, esta extremidade é estreitada. Discuta esse fenômeno.

Exercício 2

Uma mangueira de jardim, com 2 cm de diâmetro, está ligada a um irrigador com 24 orifícios. Cada orifício tem 0,12 cm de diâmetro. Sabendo que o módulo da velocidade de escoamento da água na mangueira é de 4 m/s, calcule o módulo da velocidade da água ao sair pelos orifícios do irrigador.

Exercício 3

É muito fácil determinar o módulo da velocidade de escoamento da água num dado encanamento.

Deixe escorrer, numa proveta, certo volume de água, anotando o intervalo de tempo correspondente.

Com esses dados, calcule a vazão da água no encanamento correspondente.

Então, usando a equação da continuidade, calcule o módulo da velocidade de escoamento da água num referencial fixo no encanamento.

X. Equação de Bernoulli

Vamos considerar um fluido com densidade ρ constante, em escoamento estacionário em uma tubulação sem derivações (Fig.18).

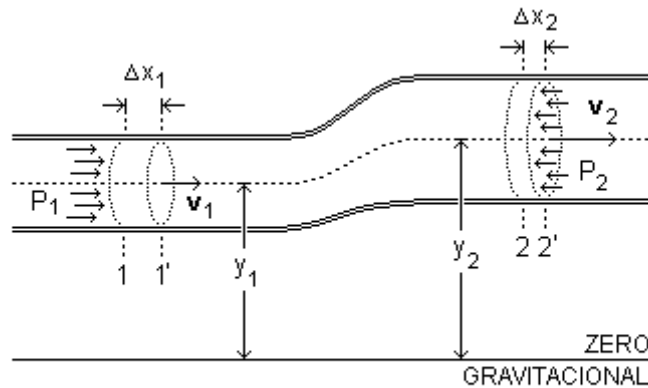


Fig.18

Sejam duas porções de fluido, ambas com volume V e massa ρV , uma na posição 1 e outra na posição 2. Num referencial fixo na tubulação, as energias dessas duas porções de fluido são dadas por:

$$E_1 = \rho V \left(\frac{1}{2} v_1^2 + g y_1 \right)$$

e

$$E_2 = \rho V \left(\frac{1}{2} v_2^2 + g y_2 \right)$$

Podemos pensar na diferença $E_2 - E_1$ como a variação da energia de uma porção de fluido que se encontra antes entre as seções 1 e 2 e depois entre as seções 1' e 2' da tubulação. Então, lembrando que essa variação de energia deve ser associada ao trabalho realizado pelo resto do fluido, podemos escrever:

$$E_2 - E_1 = F_1 \Delta x_1 - F_2 \Delta x_2$$

ou seja:

$$\rho V \left(\frac{1}{2} v_2^2 + g y_2 \right) - \rho V \left(\frac{1}{2} v_1^2 + g y_1 \right) = (P_1 - P_2) V$$

Esta expressão pode ser rearranjada, resultando:

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Esta é a equação de Bernoulli. Outra forma de apresentá-la é a seguinte:

$$P + \rho g y + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{constante}$$

Exemplo 1

Vamos discutir o escoamento de um líquido por um orifício na parede do recipiente que o contém, mostrando que o líquido, saindo por dois orifícios localizados simetricamente, um a uma altura $\frac{1}{2}H + z$ e outro a uma altura $\frac{1}{2}H - z$, tem o mesmo alcance.

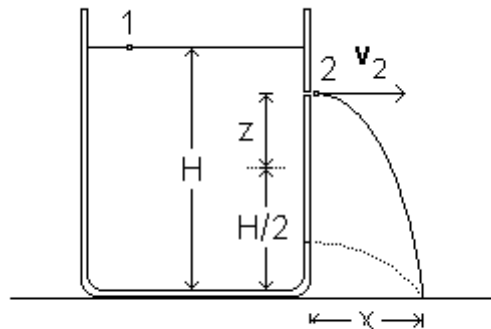


Fig.19

Tomando elementos de volume no entorno dos pontos 1 e 2, num referencial fixo no solo, com o nível de referência para a energia potencial gravitacional (zero gravitacional) passando pelo fundo do recipiente, a equação de Bernoulli fornece:

$$P_1 + \rho g H + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \rho g \left(\frac{1}{2} H + z \right) + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Vamos considerar o volume de líquido dentro do recipiente como sendo muito grande. Assim, o módulo da velocidade com que a superfície livre do líquido se move para baixo é muito menor do que o módulo da velocidade com que o líquido escoava pelo orifício na parede do recipiente. Matematicamente, $v_1 \ll v_2$. Podemos, então, desprezar v_1 .

Além disso:

$$P_1 = P_2 = P_A$$

Desse modo, a expressão acima fica:

$$gH = g \left(\frac{1}{2} H + z \right) + \frac{1}{2} v_2^2$$

e daí temos:

$$v_2 = \sqrt{g(H - 2z)}$$

O movimento do líquido ao longo da vertical é um MRUV. Então, podemos escrever:

$$\frac{1}{2}H + z = \frac{1}{2}gt^2$$

em que t representa o intervalo de tempo que o líquido leva para alcançar o solo. Esse intervalo de tempo fica dado, então, por:

$$t = \sqrt{\frac{H + 2z}{g}}$$

Por outro lado, o movimento do líquido ao longo da horizontal é um MRU. Desse modo, o alcance do líquido que sai pelo orifício fica:

$$x = v_2 t$$

e usando os resultados anteriores:

$$x = \sqrt{(H - 2z)(H + 2z)}$$

Aqui devemos observar o que se segue. Localizamos o orifício de saída do líquido a uma altura $\frac{1}{2}H + z$, medida a partir da base do recipiente, e obtivemos o alcance dado acima. Se tivéssemos localizado o orifício a uma altura $\frac{1}{2}H - z$, também medida a partir da base do recipiente, os cálculos seriam os mesmos, exceto pela substituição de z por $-z$.

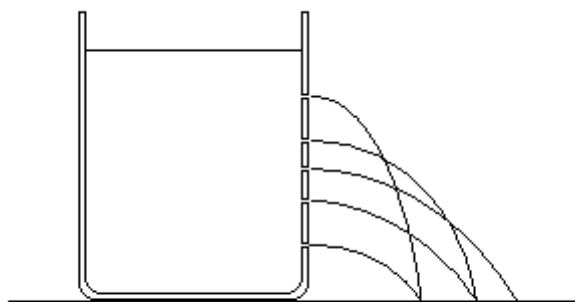


Fig.20

Mas ocorre que, se fizermos tal substituição, a expressão acima, para o alcance do líquido que sai pelo orifício, não se altera. Isto significa que o líquido, saindo por dois orifícios, um a uma altura $\frac{1}{2}H + z$ e outro a uma altura $\frac{1}{2}H - z$, tem o mesmo alcance (Fig.20).

Exemplo 2

Vamos discutir um aspecto do chute que, no futebol, é conhecido como folha seca. Neste chute, em um referencial fixo no campo de futebol, a trajetória do centro de massa da bola é tridimensional e o movimento da bola pode ser decomposto em quatro: dois movimentos de translação do centro de massa da bola na horizontal, um movimento de translação do centro de massa da bola na vertical e um movimento de rotação da bola como um todo ao redor do seu centro de massa.

Para o que nos interessa, vamos considerar apenas um dos movimentos de translação do centro de massa da bola na horizontal e o movimento de rotação da bola como um todo ao redor de um eixo vertical que passa pelo seu centro de massa.

Então, num referencial fixo no campo de futebol, a atmosfera está em repouso, o centro de massa da bola se desloca com velocidade horizontal de módulo v e os pontos da superfície da bola, no seu movimento de rotação ao redor do eixo vertical que passa pelo centro de massa da bola, se deslocam com velocidade linear de módulo v_R (Fig.21(a)).

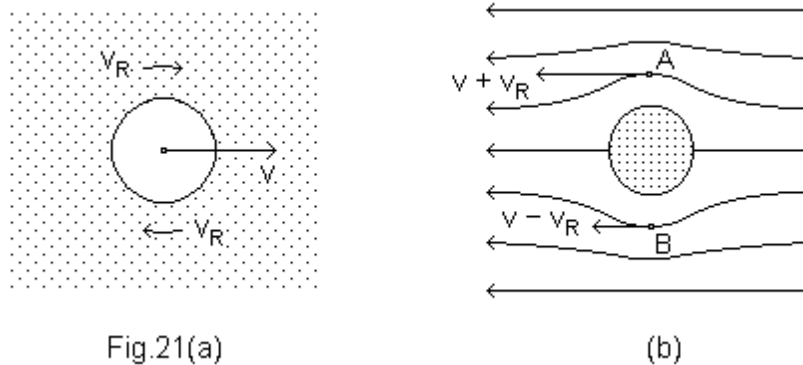


Fig.21(a)

(b)

Num referencial fixo no centro de massa da bola (Fig.21(b)), os módulos das velocidades com que os elementos de volume de ar passam pelos pontos A e B, localizados à mesma altura, são dados, respectivamente, por:

$$v_A = v + v_R$$

e

$$v_B = v - v_R$$

Para elementos de volume no entorno desses pontos, a equação de Bernoulli fornece:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

ou

$$P_B - P_A = \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2)$$

Como $v_A > v_B$, esta última expressão mostra que $P_B > P_A$. Assim, existe uma força resultante horizontal atuando na bola, perpendicular à direção da velocidade de translação do seu centro de massa, cujo sentido vai de B para A. Por isso, em vez de se mover num plano vertical, como um projétil, a bola se move numa trajetória que se desvia lateralmente desse plano.

Exemplo 3

Para discutir o mecanismo de sustentação de um avião no ar, vamos considerar a atmosfera em repouso num referencial fixo no solo. As asas, assim como outras partes do avião, arrastam sempre com elas certa quantidade de ar. Contudo, para o nosso argumento, vamos supor que esse não é o caso. Desse modo, quando uma asa passa por uma região qualquer da atmosfera, os elementos de volume de ar que estão no seu caminho se afastam de suas posições, deixando-a passar, e depois voltam às suas posições originais, quando ela já tiver passado.

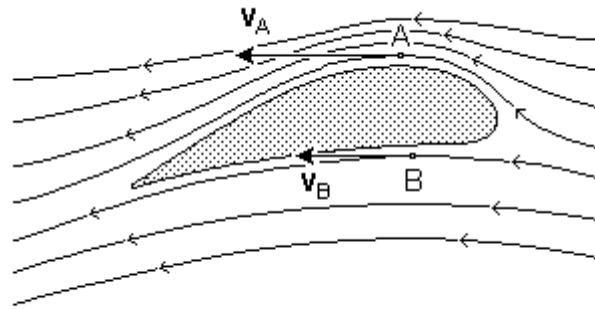


Fig.22

Em um referencial fixo no avião, os elementos de volume de ar percorrem linhas de corrente que se separam, umas passando por cima e outras passando por baixo da asa (Fig.22). Devido à forma do perfil da asa, os elementos de volume de ar que passam por cima dela têm que percorrer uma distância maior do que os elementos de volume de ar que passam por baixo. Assim, se os elementos de volume de ar que passam pelos pontos genéricos A e B têm velocidades com módulos v_A e v_B , respectivamente, devemos ter $v_A > v_B$ e um raciocínio idêntico àquele usado na discussão do chute folha seca leva à conclusão que $P_B > P_A$. Isto significa que existe uma força resultante atuando na asa do avião, de baixo para cima, que lhe dá sustentação.

Exemplo 4

Um vaporizador de perfume é composto de um recipiente para o perfume líquido, dois tubos conectados em forma de T e uma bexiga de borracha (Fig.23).

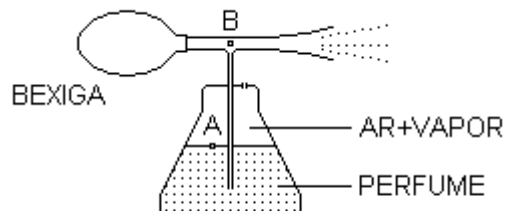


Fig.23

Quando pressionamos a bexiga, o ar no seu interior é projetado para fora, passando pela região ao redor do ponto B com uma velocidade v_B num referencial fixo no vaporizador. Enquanto isso, a mistura de ar com vapor de perfume, em um ponto A qualquer da superfície livre do perfume líquido, permanece em repouso: $v_A = 0$.

Portanto, ignorando a diferença de altura entre os pontos A e B, a equação de Bernoulli permite escrever:

$$P_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

ou:

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho v_B^2$$

em que ρ é a densidade do ar. Da última expressão podemos concluir que $P_A > P_B$. Devido a essa diferença de pressão, o perfume líquido sobe pelo tubo e encontra a corrente de ar que vem da bexiga, pulverizando-se em minúsculas gotas que são levadas para fora do pulverizador.

Tubo de Venturi

O tubo de Venturi permite determinar o módulo da velocidade de escoamento de um líquido no interior de uma tubulação. Este dispositivo é constituído por um tubo em U com mercúrio (tubo manométrico), com um dos ramos ligado a um segmento normal da tubulação e o outro ramo ligado a um segmento com um estrangulamento (Fig.24).

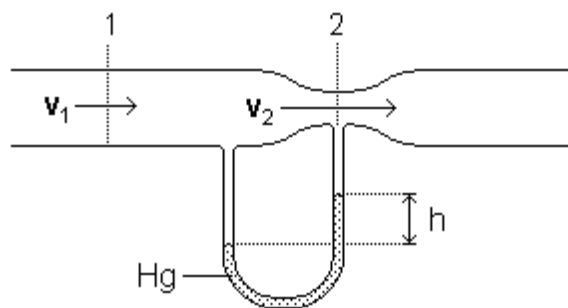


Fig.24

Vamos considerar que o líquido, de densidade ρ constante, escoar pela tubulação em regime estacionário. Em qualquer segmento normal da tubulação, cuja seção reta tem área A_1 , o líquido se move com velocidade v_1 e no segmento com estrangulamento, cuja seção reta tem área A_2 , o líquido se move com velocidade v_2 num referencial fixo na tubulação. No segmento com estrangulamento, o módulo da velocidade do líquido aumenta e a pressão diminui. Por isso, as alturas das colunas de mercúrio nos ramos do tubo em U são diferentes.

Considerando a tubulação na horizontal, a equação de Bernoulli permite escrever:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

ou:

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2)$$

em que P_1 e P_2 são as pressões do líquido, respectivamente, no segmento normal e no segmento com estrangulamento.

Por outro lado, a equação da continuidade fornece:

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

ou:

$$v_2 = \left(\frac{A_1}{A_2} \right) v_1$$

Substituindo v_2 , dado por esta expressão, naquela que dá ΔP , que obtivemos da equação de Bernoulli, resulta:

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]$$

e desta, finalmente:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \Delta P}{\rho \left[\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right]}}$$

Desta maneira, conhecendo a densidade ρ e as áreas A_1 e A_2 e medindo a diferença de pressão ΔP com o tubo manométrico, podemos determinar o módulo da velocidade de escoamento do líquido na tubulação.

Tubo Pitot

O tubo Pitot é formado por dois condutos, um dentro do outro, ligados pelos ramos de um tubo em U com mercúrio (Fig.25). Esse dispositivo permite determinar, num referencial em que ele está em repouso, o módulo da velocidade de escoamento de um gás. Alternativamente, permite determinar o módulo da velocidade de um objeto que se move através de um gás num referencial em que o gás está em repouso.

O tubo Pitot é largamente empregado para determinar os módulos das velocidades dos aviões e os módulos das velocidades de escoamento dos gases no interior de tubulações.

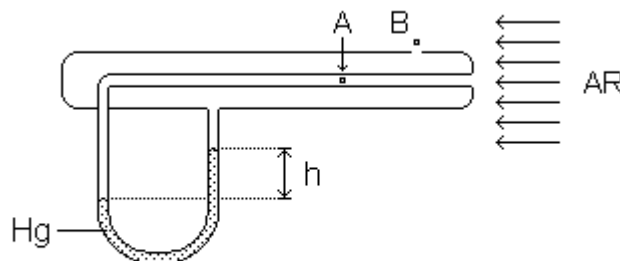


Fig.25

Vamos considerar o caso em que o tubo Pitot está em repouso no referencial considerado e o ar, com densidade ρ_{AR} , em movimento com velocidade de módulo v

(Fig.25). O ar no interior do conduto em que se encontra o ponto A está parado (estagnado) e na região em torno do ponto B, mantém a velocidade de módulo v . Como a diferença de altura entre os pontos A e B é desprezível, a equação de Bernoulli fica:

$$P_A = P_B + \frac{1}{2} \rho_{AR} v^2$$

Por outro lado:

$$P_A - P_B = \rho_M gh$$

em que ρ_M representa a densidade do mercúrio.

Essas duas expressões fornecem, para o módulo da velocidade de escoamento do ar:

$$v = \sqrt{2 \left(\frac{\rho_M}{\rho_{AR}} \right) gh}$$

Assim, medindo h , a diferença nas alturas das colunas de mercúrio nos ramos do tubo em U, podemos determinar o módulo da velocidade de escoamento do ar.

A expressão acima mostra que o procedimento de medida da velocidade de escoamento de um gás com o tubo Pitot é independente da pressão atmosférica.

Exercício 1

Segure uma folha de papel por uma de suas bordas, colocando-a na altura da boca (Fig.26(a)).

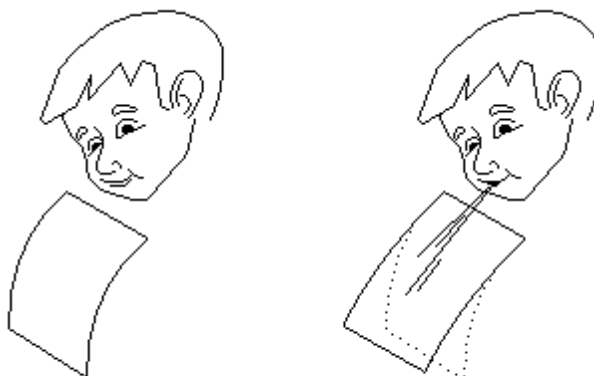


Fig.26(a)

(b)

Sopre fortemente por sobre a folha, na horizontal (Fig.26(b)). Descreva e explique o ocorrido.

Exercício 2

Suspenda duas bolinhas de tênis de mesa, separadas por cerca de 3 cm, com fios de mesmo comprimento e sopre entre elas. Observe e tente explicar o ocorrido.

Exercício 3

A queda de pressão no escoamento de água em um tubo de diâmetro constante (Fig.27(a)) e em um tubo cujo diâmetro diminui (Fig.27(b)) pode ser facilmente observada.

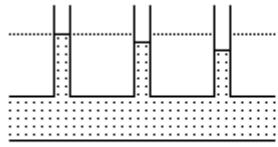


Fig.27(a)



(b)

Conecte uma das extremidades de uma mangueira no tubo de diâmetro constante e a outra extremidade na torneira.

Abra a torneira de modo que o fluxo de água vá aumentando lentamente.

Observe o desnível nos ramos do tubo e explique-o.

Repita o procedimento com o tubo cujo diâmetro diminui.

Compare o que se observa nas duas situações.

Exercício 4

Mostre que a Hidrostática é um caso particular da Hidrodinâmica, isto é, mostre que a equação:

$$P(h) = P_A + \rho gh$$

é um caso particular da equação de Bernoulli. Na expressão acima, $P(h)$ é a pressão a uma profundidade h num fluido em equilíbrio, de densidade ρ constante, P_A é a pressão atmosférica e g é o módulo da aceleração gravitacional.