

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

GRUPO DE ENSINO DE FÍSICA

MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES E ONDAS

Joecir Palandi
Dartanhan Baldez Figueiredo
João Carlos Denardin
Paulo Roberto Magnago
Karla Weber

Capa: Naieni Ferraz

SANTA MARIA - RS
2010

PREFÁCIO

Os professores do Grupo de Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria (GEF-UFSM) orientam acadêmicos de licenciatura nas disciplinas de Estágio Supervisionado em Ensino de Física e desenvolvem atividades de pesquisa em ensino e de extensão, procurando contribuir para o aperfeiçoamento dos professores do ensino médio. As atividades de extensão envolvem empréstimo de material instrucional para atividades experimentais, apresentação de cursos, oficinas e palestras e elaboração de cadernos didáticos.

De modo geral, a necessidade que os professores do ensino médio têm de educação continuada não fica satisfeita devido à dificuldade de acesso a atividades presenciais como oficinas e cursos de atualização e também devido à pouca oferta de material de apoio, como cadernos didáticos e artigos de divulgação. Além disso, entre esses professores, o livro texto goza de excessiva importância, determinando a seqüência dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula e o próprio método de ensino, que privilegia a solução de exercícios e problemas numéricos, como se a aplicação coerente das expressões matemáticas pudesse levar, por si mesma, à aprendizagem significativa. Por outro lado, os conhecimentos de Física são produzidos por meio de atividades teóricas e experimentais integradas e, por isso, a prática docente baseada apenas no trabalho com o livro texto apresenta a disciplina de modo parcial e incompleto. Esses três fatores representam importantes limitações ao ensino de Física na escola de ensino médio.

O GEF-UFSM defende que uma melhor compreensão dos conteúdos é alcançada quando o professor privilegia a discussão conceitual aprofundada dos princípios e leis fundamentais e de como eles operam no interior dos fenômenos, trabalhando paralelamente a notação matemática, o vocabulário, as representações gráficas, as escalas e as proporções. Essa compreensão não é alcançada pelo ensino centrado no professor, que privilegia a solução de exercícios e problemas numéricos e que conduz atividades experimentais isoladas, apenas para reproduzir fenômenos ou comprovar o valor numérico de uma ou outra constante, e sim através do processo que se estabelece pelo diálogo professor-aluno, construído a partir dos conhecimentos que os alunos já dominam. Nesse sentido, o GEF-UFSM defende uma abordagem ao ensino de Física em que a experimentação acompanhe a seqüência lógica dos conteúdos, com uma estratégia de integração à teoria, motivando o diálogo em sala de aula, apoiando a discussão conceitual e vinculando-a a elementos concretos na observação.

Este caderno foi elaborado para dar ao professor uma visão mais consistente e rigorosa do paradigma da Física, ajudando-o na elaboração de planejamentos em que os conteúdos sejam distribuídos ao longo da carga horária disponível de modo mais condizente com sua importância relativa, com estratégias de ensino mais próximas do modo de fazer ciência. O planejamento das atividades didáticas não deve ser uma tarefa meramente burocrática, uma simples cópia do sumário do livro texto, sem qualquer vínculo com a importância relativa dos conteúdos da disciplina em questão, com a carga horária disponível, com os conhecimentos que seus alunos já dominam e com a realidade do meio em que a escola está inserida. Um planejamento bem executado e constantemente reavaliado pode ser um instrumento útil para que o processo de ensino-aprendizagem se estabeleça e seja efetivo. Este caderno foi elaborado para ser útil também no trabalho direto com os alunos em sala de aula e, para isso, incorpora discussões detalhadas de um grande número de exemplos e propõe exercícios de aplicação.

O GEF-UFSM agradece as críticas e sugestões que possam levar esse caderno mais facilmente aos seus objetivos.

SUMÁRIO

MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

I	Introdução	1
II	Definição do Movimento Circular Uniforme	1
III	Aceleração Centrípeta	5
IV	Força Centrípeta	8
V	Força Centrífuga	9
VI	Imponderabilidade	12
VII	Movimento da Lua ao Redor da Terra	14
VIII	Força de Coriolis	15

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

I	Introdução	19
II	MHS Como Projeção do MCU	19
III	Relações Matemáticas	25
IV	Definição de MHS	29
V	Pêndulo Simples	31
VI	Massa Gravitacional e Massa Inercial	38
VII	Sistema Corpo-Mola	39
VIII	Energia no MHS	44
IX	Ressonância	49
X	Mais Ressonância	50

ONDAS MECÂNICAS

I	Introdução	55
II	Diferença de Fase	55
III	Ondas Mecânicas Progressivas Unidimensionais	56
IV	Elementos de uma Onda	59
V	Transferência de Energia pela Onda	62
VI	Equação da Onda	63
VII	Princípio de Superposição	65
VIII	Velocidade de Fase e Velocidade de Grupo	67
IX	Ondas Estacionárias	69
X	A Cuba de Ondas	73
XI	Reflexão	74
XII	Refração	76
XIII	Construção de Huygens	77

XIV	Difração	78
XV	Ondas Sonoras	79
XVI	Qualidades Fisiológicas do Som	81
XVII	Notas Musicais	84
XVIII	Efeito Doppler	87
XIX	A Barreira do Som	88
XX	As Ondas do Mar	90

MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

I. Introdução

Em referenciais convenientes, aparecem, na Natureza, movimentos circulares uniformes associados, por exemplo, a fenômenos astronômicos. Assim, num referencial fixo no Sol, o movimento de cada planeta pode ser considerado, com boa aproximação, circular e uniforme e num referencial fixo em um particular planeta, o movimento de cada uma de suas luas também pode ser considerado, com boa aproximação, circular e uniforme. Na escala humana e em referenciais convenientes, aparecem movimentos circulares uniformes associados, por exemplo, a engrenhos mecânicos. Assim, num referencial fixo no eixo de uma roda ou engrenagem, o movimento de qualquer uma de suas partes pode ser considerado circular e uniforme.

A palavra uniforme, neste contexto, se refere ao fato de ser constante o módulo da velocidade linear. Contudo, sabemos que a velocidade é um vetor e, sendo assim, embora seja constante o módulo do vetor velocidade linear, a sua direção varia continuamente e, por isso, qualquer uma dessas partes que se move com um movimento circular uniforme deve ter uma aceleração não nula e, portanto, estar sob o efeito de uma força resultante não nula.

Por outro lado, além da velocidade linear, podemos associar ao movimento circular uma velocidade angular. No movimento circular uniforme, o vetor velocidade angular é constante.

II. Definição do Movimento Circular Uniforme

Em um dado referencial, uma partícula está em um movimento circular uniforme (MCU) quando se movimenta sobre uma circunferência com velocidade linear de módulo constante.

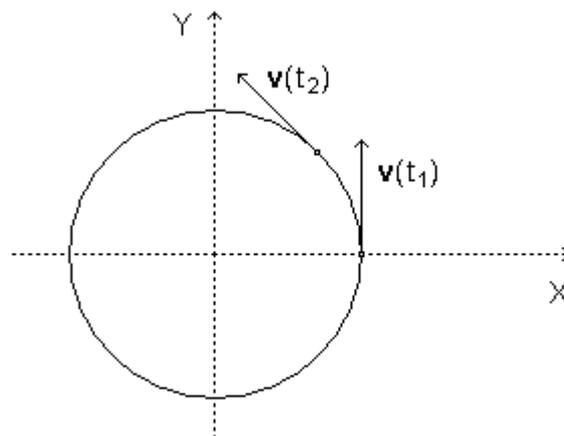


Fig.1

O vetor velocidade linear é sempre tangente à trajetória (Fig.1), ou seja, varia continuamente porque sua direção varia.

Na Fig.1, que representa os vetores velocidade linear de uma partícula em MCU nos instantes de tempo genéricos t_1 e t_2 , temos $\mathbf{v}(t_1) \neq \mathbf{v}(t_2)$ embora $v(t_1) = v(t_2)$. Aqui é importante lembrar que estamos usando \mathbf{v} (em negrito) para representar o vetor velocidade linear e v (sem negrito) para representar o módulo da velocidade linear.

Período e Frequência

O tempo levado pela partícula para percorrer uma vez a sua trajetória é o período (T) do movimento. Por outro lado, o número de voltas dadas pela partícula na unidade de tempo é a frequência (f) do movimento. Assim:

$$f = \frac{1}{T}$$

No Sistema Internacional, o período é dado em segundos e a frequência, em hertz: $1 \text{ Hz} = \text{s}^{-1}$. Para ter uma idéia mais concreta da veracidade da expressão acima, vamos considerar uma partícula em MCU que leva 4 s para percorrer exatamente uma vez a circunferência que constitui a sua trajetória. Assim, o período do movimento é de 4 s. Por outro lado, como a partícula percorre uma volta em 4 s, em um segundo ela percorre $\frac{1}{4}$ de volta. Portanto, a frequência do movimento da partícula é $1 / (4 \text{ s})$, ou seja, $\frac{1}{4} \text{ Hz}$.

Velocidade Linear

O módulo da velocidade linear da partícula pode ser definido como a distância percorrida sobre a trajetória (de raio R) dividida pelo intervalo de tempo levado para percorrê-la. Assim, tomando o período como intervalo de tempo, podemos escrever:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

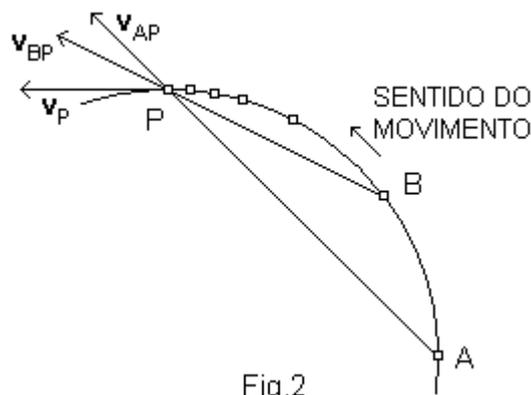


Fig.2

A direção do vetor velocidade linear é sempre tangente à trajetória da partícula. Para entender o porquê disso temos que levar em conta que esta é uma velocidade instantânea, definida por um processo de limite.

Para ilustrar esse processo de limite, discutiremos a velocidade linear da partícula no instante de tempo t_p , quando ela se encontra na posição P (Fig.2). Sendo assim, vamos considerar as posições A, B, etc., cada vez mais próximas da posição P,

e Δt_{AP} , o intervalo de tempo levado pela partícula para se deslocar de A até P, Δt_{BP} , o intervalo de tempo levado pela partícula para se deslocar de B até P, etc. Tomando o módulo do vetor deslocamento entre as posições A e P e dividindo-o por Δt_{AP} , obtemos v_{AP} , o módulo do vetor velocidade média entre A e P, tomando o módulo do vetor deslocamento entre B e P e dividindo-o por Δt_{BP} , obtemos v_{BP} , o módulo do vetor velocidade média entre B e P, e assim por diante. A seqüência de números v_{AP} , v_{BP} , etc., tende para o número v_P , o módulo da velocidade linear da partícula no ponto P. Desse modo, no limite $\Delta t \rightarrow 0$, a velocidade média tende à velocidade instantânea em t_P , isto é, a velocidade da partícula quando ela se encontra na posição P. Além disso, como as direções das velocidades médias são dadas pelas retas suportes dos vetores deslocamento correspondentes, é fácil ver que, no limite $\Delta t \rightarrow 0$, a velocidade linear tem direção tangente à trajetória da partícula no ponto P.

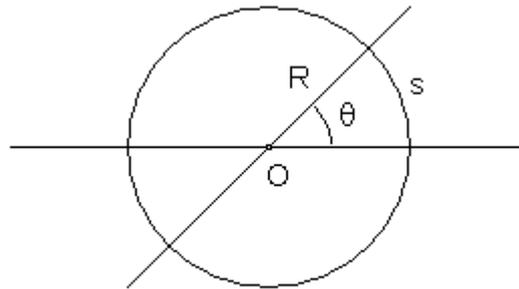


Fig.3

Velocidade Angular

Consideremos duas retas que se cruzam em um ponto O (Fig.3). Para definir o ângulo θ entre essas retas traçamos uma circunferência de raio arbitrário R, com centro no ponto O, delimitando um arco de circunferência de comprimento s. O ângulo θ , em radianos, é dado por:

$$\theta = \frac{s}{R}$$

Agora, se, em vez de considerar a distância percorrida pela partícula sobre sua trajetória, considerarmos o ângulo descrito pela linha que une a partícula ao centro da trajetória, podemos definir a velocidade angular. O módulo de tal velocidade é dado pelo cociente do ângulo descrito (em radianos) pelo intervalo de tempo correspondente. Assim, tomando o período como intervalo de tempo e lembrando que a frequência é o inverso do período, temos:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ou

$$\omega = 2\pi f$$

No sistema Internacional, o módulo da velocidade angular é dado em radianos por segundo: rad / s.

A direção da velocidade angular é perpendicular ao plano da trajetória e o sentido é dado pela seguinte regra: com os dedos da mão direita colocados ao longo da trajetória descrita pela partícula e na mesma direção do movimento, o polegar aponta o sentido da velocidade (Fig.4).

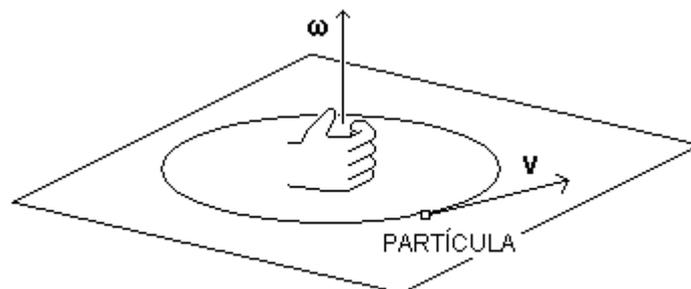


Fig.4

Comparando a expressão matemática para o módulo da velocidade linear com a expressão matemática para o módulo da velocidade angular, podemos escrever a seguinte relação:

$$v = \omega R$$

Exercício 1

O ponteiro dos minutos de um relógio analógico tem 10 cm de comprimento. Calcule o período e a frequência do seu movimento num referencial fixo no relógio.

Exercício 2

Para o mesmo relógio do exercício 1 e no mesmo referencial, calcule (a) o módulo da velocidade angular do ponteiro dos minutos e (b) o módulo da velocidade linear da extremidade livre desse mesmo ponteiro.

Exercício 3

Num dado referencial, um disco gira ao redor de um eixo fixo que passa pelo seu centro com velocidade angular constante. Um ponto da borda do disco tem velocidade linear com módulo de 50 cm/s. Um ponto a 20 cm da borda tem velocidade linear com módulo de 10 m/s. Calcule o módulo da velocidade angular do disco.

Exercício 4

Num referencial fixo no Sol, a Terra gira ao redor de um eixo que passa pelos pólos. O raio da Terra tem aproximadamente 6×10^6 m. Encontre a latitude de sua cidade e calcule o módulo da velocidade linear da sua escola.

Exercício 5

Um ciclista, pedalando sua bicicleta, faz com que ela se movimente com uma velocidade de módulo $v = 5,2$ m/s num referencial fixo na estrada. Os pneus têm raios

externos de 26 cm e as rodas dentadas A e B têm raios de 4 cm e 8 cm, respectivamente (Fig.5). Tomando um referencial fixo no ciclista, calcule (a) o módulo da velocidade linear dos pontos das bordas externas dos pneus e (b) o módulo da velocidade angular da roda dentada B.

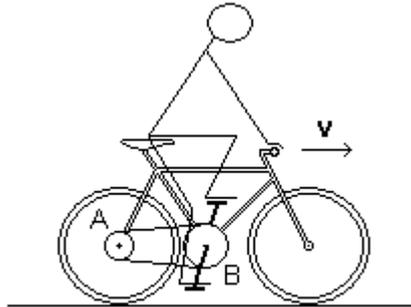


Fig.5

III. Aceleração Centrípeta

De acordo com a primeira lei de Newton, se é nula a força resultante sobre uma partícula, ela só pode estar parada ou em movimento retilíneo uniforme num referencial inercial.

Por outro lado, como já discutimos, no movimento circular uniforme, dados dois instantes de tempo genéricos t_1 e t_2 , as correspondentes velocidades lineares $\mathbf{v}(t_1)$ e $\mathbf{v}(t_2)$ são diferentes, ou seja, no intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, existe variação da velocidade linear. Desse modo, a partícula tem uma aceleração.

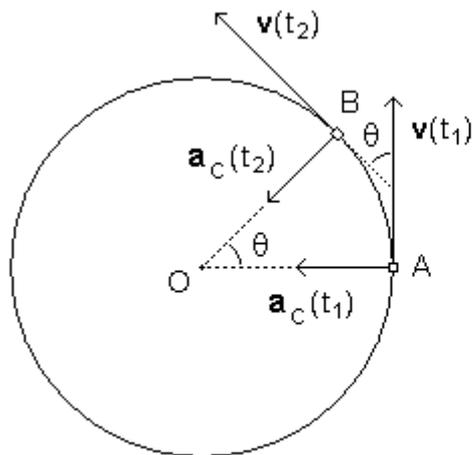
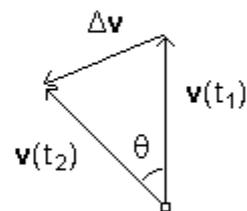


Fig.6(a)



(b)

Além disso, como $v(t_2) = v(t_1)$, isto é, como o módulo do vetor velocidade linear é constante, o vetor aceleração não pode ter componente ao longo da direção do vetor velocidade linear. Portanto, o vetor aceleração (instantânea) da partícula, em qualquer instante de tempo, deve ser perpendicular ao correspondente vetor velocidade linear. Em outras palavras, deve apontar sempre para o centro da trajetória. Por isso, a

aceleração da partícula com movimento circular uniforme é chamada de aceleração centrípeta. O módulo da aceleração centrípeta é dado por:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

em que v representa o módulo da velocidade linear da partícula e R , o raio da trajetória. Para demonstrar essa expressão, consideremos a Fig.6(a), que representa os vetores velocidade linear e aceleração centrípeta para uma partícula em movimento circular uniforme, nos instantes t_1 e t_2 , quando ela se encontra, respectivamente, nas posições A e B. O triângulo com vértices nos pontos O, A e B tem dois lados iguais, de comprimento R , que fazem, entre si, um ângulo θ . O triângulo formado pelos vetores $\mathbf{v}(t_1)$, $\mathbf{v}(t_2)$ e $\Delta\mathbf{v}$ (Fig.6(b)), em que $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t_2) - \mathbf{v}(t_1)$, também tem dois lados iguais, de comprimento v , que fazem, entre si, um ângulo θ . Desse modo, esses dois triângulos são semelhantes. Por outro lado, estamos interessados no módulo da aceleração instantânea e, por isso, devemos considerar o limite $t_2 \rightarrow t_1$, isto é, $\theta \rightarrow 0$. Nesse limite, o arco de circunferência entre os pontos A e B se confunde com a corda entre os mesmos pontos e podemos dizer que ambos têm comprimento $v\Delta t$. Assim, temos:

$$\frac{R}{v\Delta t} = \frac{v}{|\Delta\mathbf{v}|}$$

ou:

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{\Delta t} = \frac{v^2}{R}$$

O lado esquerdo da última expressão, no limite $t_2 \rightarrow t_1$, é exatamente o módulo da aceleração centrípeta. Portanto, a demonstração está completa.

Em termos do módulo da velocidade angular, o módulo da aceleração centrípeta é dado por:

$$a_c = \omega^2 R$$

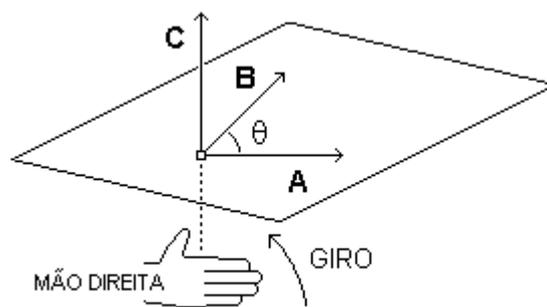


Fig.7

Expressões Vetoriais

Dados os vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} , o produto vetorial de \mathbf{A} por \mathbf{B} , representado por $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$, é um vetor \mathbf{C} (Fig.7), cujo módulo é dado por:

$$C = AB \sin \theta$$

em que θ é o ângulo entre **A** e **B**. A direção do vetor **C** é perpendicular ao plano que contém os vetores **A** e **B** e o sentido é dado pela regra da mão direita.

A regra da mão direita pode ser enunciada do seguinte modo: colocando os dedos da mão direita com a direção e o sentido do vetor **A** e girando-os para que fiquem com a direção e o sentido do vetor **B**, o polegar, que faz o papel de eixo de rotação, indica o sentido do vetor **C**.

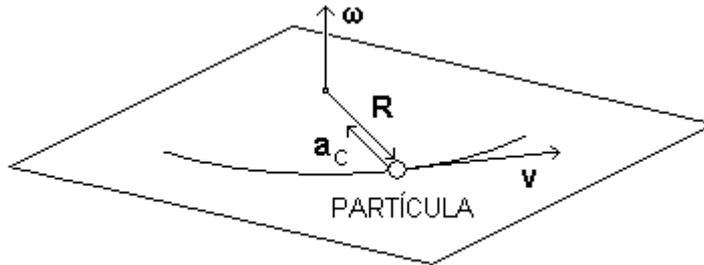


Fig.8

Escrevendo **R** para o vetor com origem no centro da trajetória e extremidade na posição ocupada pela partícula (Fig.8), levando em conta que o vetor ω é perpendicular ao plano da trajetória, com sentido dado pela regra da mão direita, e levando em conta que o vetor aceleração centrípeta tem a mesma direção que o vetor **R**, mas sentido contrário, correspondentemente às expressões para os módulos da velocidade linear e da aceleração centrípeta, $v = \omega R$ e $a_c = \omega^2 R$, temos as relações:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$$

e

$$\mathbf{a}_c = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

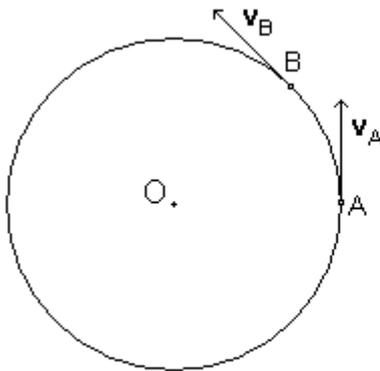
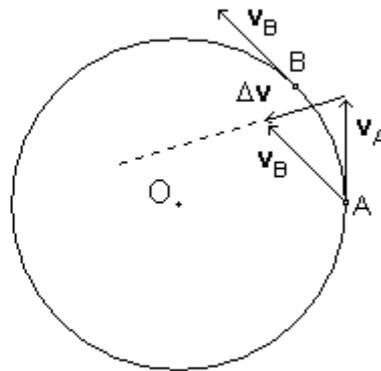


Fig.9(a)



(b)

Exercício 1

Desenhe uma circunferência com 10 cm de raio e sobre ela assinale dois pontos, como A e B, relativamente próximos um do outro (Fig.9(a)). Nesses pontos,

desenhe flechas de 4 cm de comprimento para representar as respectivas velocidades lineares \mathbf{v}_A e \mathbf{v}_B de uma partícula em MCU.

Transporte a flecha que representa a velocidade \mathbf{v}_B paralelamente a si mesma, de modo que sua origem coincida com a origem da flecha que representa a velocidade \mathbf{v}_A , e represente, também por uma flecha, o vetor $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$.

O vetor aceleração centrípeta tem a mesma direção e o mesmo sentido que o vetor $\Delta\mathbf{v}$ e ambos devem apontar para o centro da trajetória circular da partícula em MCU. Discuta o resultado do seu desenho quanto à direção esperada de $\Delta\mathbf{v}$.

Repita todo o procedimento descrito acima tomando pontos A e B cada vez mais próximos um do outro. Compare cada novo resultado com aqueles obtidos antes.

Discuta o caso limite em que os pontos A e B estão tão próximos um do outro que se confundem.

Discuta a relação de todo esse procedimento com a definição rigorosa de aceleração centrípeta como um processo de limite.

Exercício 2

Um disco gira com velocidade angular constante num dado referencial. O ponto A está a 10 cm do eixo e o ponto B está a 30 cm do eixo. Diga para que ponto é maior (a) o módulo da velocidade angular, (b) o módulo da velocidade linear e (c) o módulo da aceleração centrípeta.

Exercício 3

A hélice de um ventilador dá 900 voltas por minuto num referencial fixo no ventilador. Calcule o módulo da aceleração de um ponto da hélice que está a 15 cm do eixo de rotação.

IV. Força Centrípeta

Uma partícula com movimento circular uniforme tem uma aceleração centrípeta cujo módulo é dado por:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

em que v representa o módulo da sua velocidade linear e R , o raio da trajetória. Então, pela segunda lei de Newton, a força resultante sobre a partícula (de massa m), chamada força centrípeta, tem módulo:

$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$

Exercício 1

Um adulto brinca com uma criança de 25 kg, fazendo-a girar numa circunferência de 1 m de raio num referencial fixo no solo. A criança dá uma volta a cada 2 segundos. Calcule o módulo da força centrípeta que o adulto exerce na criança.

Exercício 2

Em um referencial fixo no solo, um balde se move na vertical, em MCU, com velocidade linear de módulo v . Uma pedra, colocada no interior do balde, permanece sempre em contato com o fundo do balde. (a) Calcule o módulo, a direção e o sentido da força que o balde exerce sobre a pedra no ponto mais alto da trajetória. (b) Calcule o módulo, a direção e o sentido da força que o balde exerce sobre a pedra no ponto mais baixo da trajetória. (c) Calcule o valor mínimo de v para que seja verdadeira a hipótese de que a pedra permanece sempre em contato com o fundo do balde.

Exercício 3

Um automóvel com massa de 750 kg percorre uma curva circular plana e horizontal com um raio de 50 m. O coeficiente de atrito estático entre os pneus do automóvel e a pista vale $\mu = 0,8$. (a) Calcule a intensidade máxima da força de atrito exercida pela estrada sobre os pneus. (b) Considere um referencial fixo no solo e calcule o valor máximo do módulo da velocidade do automóvel para que ele faça a curva sem derrapar.

V. Força Centrífuga

Para discutir a força centrífuga, vamos considerar certo fenômeno num referencial inercial, em que existe força centrípeta e não existe força centrífuga, e o mesmo fenômeno num referencial não inercial, em que existe força centrífuga e não existe força centrípeta.

Referencial Inercial

Num referencial inercial, como aquele representado por S na Fig.10, um disco gira, na horizontal, com velocidade angular constante. A origem desse referencial coincide com o centro do disco e um de seus eixos cartesianos coincide com o eixo de rotação.

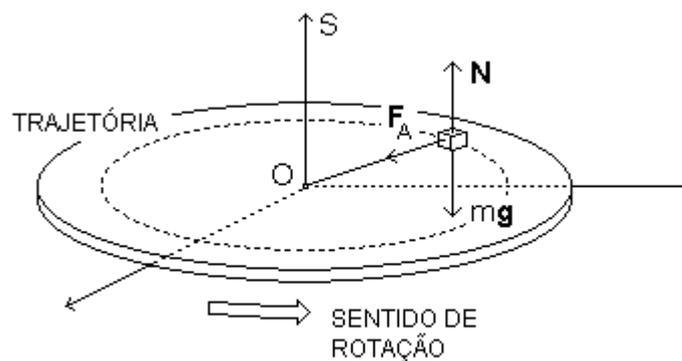


Fig.10

Sobre o disco e em repouso relativamente a ele, existe um bloco. No referencial S, o movimento do bloco é um movimento circular uniforme. Então, a força resultante sobre o bloco é a força centrípeta e tem módulo:

$$F_C = \frac{mv^2}{R}$$

em que m , v e R representam, respectivamente, a massa, o módulo da velocidade linear e o raio da trajetória circular do bloco.

Nesse referencial inercial atuam, sobre o bloco, três forças: a força peso, mg , vertical e apontando para baixo, a força normal, \mathbf{N} , vertical e apontando para cima, e a força de atrito estático, \mathbf{F}_A , horizontal e apontando para o centro O da trajetória. Como o bloco não se move ao longo da direção vertical, a segunda lei de Newton garante que a soma vetorial da força peso com a força normal é zero. Assim, a força de atrito estático, que a superfície do disco exerce sobre o bloco, é a resultante das forças que atuam sobre o bloco e é, portanto, a força centrípeta que causa o seu movimento circular uniforme:

$$\mathbf{F}_C = \mathbf{F}_A$$

Se pudéssemos fazer desaparecer a força de atrito estático, a segunda lei de Newton garante que, a partir desse instante, o movimento do bloco seria um movimento retilíneo uniforme, pelo menos enquanto estivesse sobre o disco. Assim, o movimento do bloco é circular e uniforme porque a força de atrito estático causa uma aceleração centrípeta de módulo constante.

A força peso do bloco, de natureza gravitacional, é a força que a Terra exerce sobre o centro do bloco. A correspondente força de reação, no sentido da terceira lei de Newton, é a força, também de natureza gravitacional, que o bloco exerce sobre o centro da Terra.

A força normal, de natureza eletromagnética, é a força vertical que a superfície do disco exerce sobre o bloco. A correspondente força de reação, no sentido da terceira lei de Newton, é uma força também vertical, de natureza eletromagnética, que o bloco exerce sobre a superfície do disco.

A força de atrito estático, de natureza eletromagnética, é a força horizontal que a superfície do disco exerce sobre o bloco. A correspondente força de reação, no sentido da terceira lei de Newton, é uma força de atrito também horizontal, de natureza eletromagnética, que o bloco exerce sobre a superfície do disco.

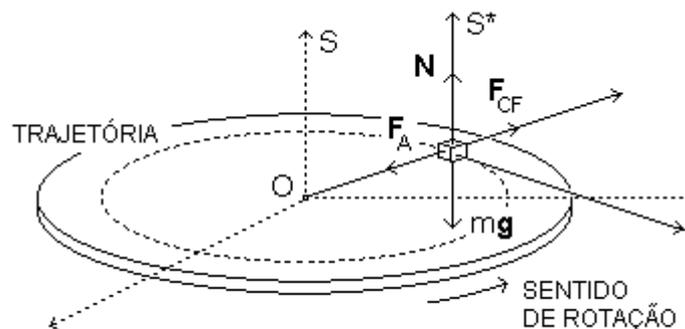


Fig.11

Referencial Não Inercial

Um referencial fixo no bloco como, por exemplo, aquele representado por S^* na Fig.11, é um referencial não inercial porque gira no referencial inercial S .

A força peso, mg , vertical e apontando para baixo, a força normal, \mathbf{N} , vertical e apontando para cima, e a força de atrito estático, \mathbf{F}_A , horizontal e apontando para o eixo de rotação do disco, continuam agindo sobre o bloco.

Vamos impor que a segunda lei de Newton seja válida no referencial não inercial S^* . Então, como o bloco está em repouso nesse referencial, podemos afirmar que a resultante das forças que atuam sobre ele é zero. Isto significa que a soma vetorial das forças que atuam na vertical é zero e que a soma vetorial das forças que atuam na horizontal também é zero. Na vertical, a soma vetorial da força peso com a força normal é zero. Na horizontal, contudo, deve existir outra força atuando sobre o bloco, de modo que sua soma vetorial com a força de atrito estático seja zero. Em outras palavras, deve existir, atuando sobre o bloco, uma força horizontal com o mesmo módulo e a mesma direção que a força de atrito estático, isto é, a direção da reta que passa pelo centro do disco e pelo bloco, mas sentido contrário, isto é, apontando do centro do disco para o bloco. Essa força, que só existe no referencial não inercial, é a força centrífuga, \mathbf{F}_{CF} . Sendo assim, temos, em módulo:

$$F_{CF} = F_A$$

A força de atrito estático entre duas superfícies em contato só existe se essas superfícies, embora em repouso relativo, tenham a tendência de se mover uma em relação à outra. Assim, a realidade da força centrífuga no referencial não inercial, vem da tendência do bloco se mover em relação ao disco no sentido de se afastar do seu centro, tendência essa causada pela força centrífuga, e é por isso que aparece, simultaneamente, a força de atrito estático.

Já discutimos acima as forças de reação, no sentido da terceira lei de Newton, para as forças peso, normal e de atrito estático. Para a força centrífuga, contudo, não existe uma força de reação. No referencial não inercial S^* , a força centrífuga e a força de atrito estático têm módulos iguais, direções iguais e sentidos opostos, mas nem por isso constituem um par ação-reação porque atuam sobre o mesmo corpo e são de naturezas diferentes: a força de atrito estático é de caráter eletromagnético e a força centrífuga, um efeito devido ao caráter não inercial do referencial usado para descrever o movimento do bloco e que não pode ser associado a qualquer interação fundamental.

Como discutimos acima, a força centrífuga tem o mesmo módulo que a força de atrito estático e como discutimos mais acima, a força centrípeta tem também o mesmo módulo que a força de atrito estático. Assim, a força centrífuga (que existe num referencial não inercial) e a força centrípeta (que existe num referencial inercial) têm o mesmo módulo e podemos escrever:

$$F_{CF} = \frac{mv^2}{R}$$

em que v representa o módulo da velocidade linear do bloco medido no referencial inercial S e R , o raio da trajetória correspondente.

Especificar um referencial significa estabelecer como um sistema de três eixos ortogonais está disposto em relação aos corpos que participam do fenômeno que se quer descrever. A escolha do referencial é completamente arbitrária, mas a escolha se reflete no modo como o fenômeno é descrito. A primeira lei de Newton estabelece a existência dos referenciais inerciais. Por isso, estabelece também, indiretamente, a existência de referenciais não inerciais. A segunda lei pode ser considerada válida em todos os referenciais. Contudo, ao considerá-la válida em referenciais não inerciais,

temos que aceitar a existência de forças que não podem ser associadas a qualquer interação fundamental. A terceira lei de Newton não vale para referenciais não inerciais.

Exercício 1

Discuta a seguinte frase: a primeira lei de Newton estabelece a existência dos referenciais inerciais.

Exercício 2

Enquanto um automóvel percorre uma curva plana de uma estrada, seus ocupantes são jogados em direção à lateral do veículo. Discuta esse fenômeno num referencial inercial fixo no solo e num referencial não inercial fixo no automóvel.

VI. Imponderabilidade

Consideremos outro exemplo de MCU: em um referencial inercial fixo no centro da Terra, um objeto de massa m , como um satélite artificial, descreve uma órbita circular de raio R ao redor da Terra, de massa M (Fig.12).

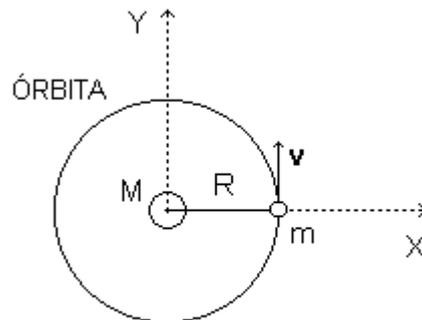


Fig.12

Como a órbita é circular, a força gravitacional que a Terra exerce sobre o objeto, isto é, a força peso do objeto, atua como força centrípeta. Por isso, podemos escrever, em módulo:

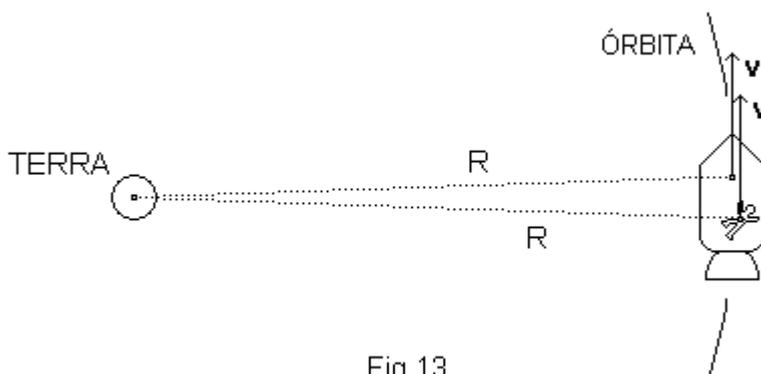
$$\frac{mv^2}{R} = G \frac{mM}{R^2}$$

em que G representa a constante universal da gravitação. Dessa forma, o raio da órbita fica dado por:

$$R = G \frac{M}{v^2}$$

Esta expressão mostra que o raio da órbita do objeto ao redor da Terra depende de G , uma constante universal, de M , a massa da Terra, e de v , o módulo da velocidade linear orbital do objeto.

O raio da órbita não depende da massa do objeto que descreve essa órbita. Sendo assim, um astronauta e a nave espacial dentro da qual ele se encontra podem ter a mesma órbita, desde que ambos tenham a mesma velocidade linear orbital (Fig.13). Então, num referencial fixo na nave, o astronauta permanece em repouso. O astronauta parece flutuar dentro da nave. Este fenômeno é o que se chama de imponderabilidade.



Imponderabilidade não significa falta de gravidade ou falta de peso, já que são justamente os pesos dos objetos (astronauta e nave, neste caso) que fazem o papel de forças centrípetas para garantir que as respectivas órbitas sejam circulares.

Exercício 1

No interior de uma nave espacial, na condição de imponderabilidade, um astronauta tem, em suas mãos, dois corpos esféricos com aparências externas idênticas. Contudo, um é feito de alumínio e o outro, de chumbo. Discuta como o astronauta pode determinar a composição dos corpos sem causar-lhes qualquer dano.

Exercício 2

Discuta como pode ser a chama de uma vela no interior de uma nave espacial, na condição de imponderabilidade.

Exercício 3

Um avião se desloca na horizontal, a uma altitude de 10 km acima do nível do mar, com velocidade constante num referencial fixo na Terra. Discuta a possibilidade dos seus ocupantes experimentarem a condição de imponderabilidade.

Exercício 4

Discuta a possibilidade dos ocupantes de um avião que se desloca na vertical experimentarem a condição de imponderabilidade.

VII. Movimento da Lua ao Redor da Terra

Considerando um referencial inercial fixo no centro da Terra, vamos mostrar agora que a Lua cai na direção da Terra, porém sem jamais alcançá-la.

Consideremos certo intervalo de tempo Δt durante o qual a Lua se movimenta de A para B (Fig.14) sobre o arco de circunferência tracejado. Como estamos interessados em tomar os pontos A e B muito próximos um do outro, esse movimento pode ser pensado como a soma de dois movimentos simultâneos e aproximadamente perpendiculares: um movimento retilíneo uniforme (MRU), de A para C, e um movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), de C para B. Este último, aproximado, já que a aceleração correspondente, sendo a aceleração gravitacional, só é aproximadamente constante.

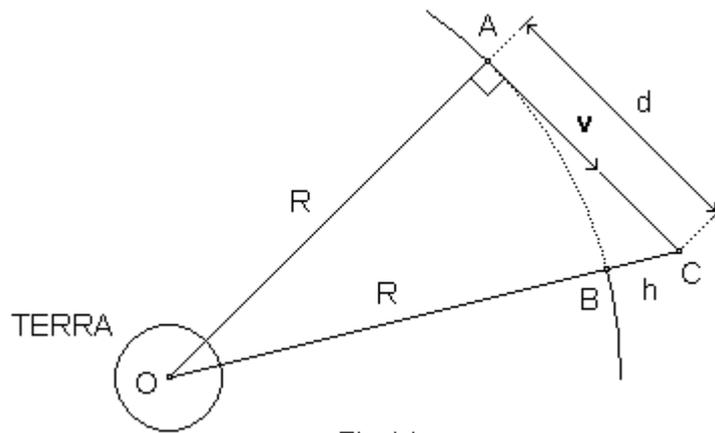


Fig.14

O triângulo AOC é um triângulo retângulo com o ângulo reto em A. Então, pelo teorema de Pitágoras:

$$(R + h)^2 = R^2 + d^2$$

ou:

$$d^2 = 2Rh + h^2$$

em que h representa a distância entre B e C e d representa a distância entre A e C.

Como estamos tomando os pontos A e B muito próximos um do outro, podemos considerar $h \ll R$, de modo que também $h^2 \ll Rh$ e podemos desprezar o segundo termo do lado direito da igualdade na expressão acima e escrever, de modo aproximado:

$$d^2 \approx 2Rh$$

Levando em conta que o movimento de A para C é um MRU e o movimento de C para B é um MRUV (aproximado), temos:

$$d = v\Delta t$$

e

$$h \approx \frac{1}{2} a_c (\Delta t)^2$$

em que v representa o módulo da velocidade linear orbital da Lua e a_c , o módulo da sua aceleração centrípeta.

Com estes resultados, a equação acima fica:

$$v^2 (\Delta t)^2 \approx 2R \left(\frac{1}{2} a_c \right) (\Delta t)^2$$

e daí:

$$a_c \approx \frac{v^2}{R}$$

Se os pontos A e B, considerados até aqui como estando muito próximos um do outro, forem considerados infinitesimalmente próximos, ou seja, se tomarmos o limite em que A tende para B ou, o que dá no mesmo, se tomarmos o limite em que Δt tende a zero, os dois movimentos considerados (de A para C e de C para B) passam a ser realmente perpendiculares entre si.

Além disso, nesse limite, o movimento de C para B passa a ser um MRUV exato e todas as expressões matemáticas aproximadas escritas acima também se tornam exatas.

Em particular, o módulo da aceleração, a_c , fica exatamente igual a v^2 / R , como deve ser, já que representa o módulo da aceleração centrípeta do MCU descrito pela Lua ao redor da Terra.

Considerando um intervalo de tempo infinitesimal, o MRUV de C para B pode ser considerado como um movimento de queda da Lua em direção ao centro da Terra porque é vertical e causado pela força gravitacional da Terra sobre a Lua. Contudo, apesar deste movimento de queda, a Lua não se aproxima da Terra mais do que o suficiente para compensar o seu afastamento devido ao MRU de A para C. Portanto, a Lua cai em direção ao centro da Terra, mas não se aproxima dele porque existe outro movimento que tende a afastá-la deste mesmo centro. Os dois movimentos se compensam e a Lua descreve um MCU com aceleração centrípeta de módulo dado por $a_c = v^2/R$.

Exercício

Numa aula da Física, um aluno pergunta à professora o que mantém os satélites artificiais em órbita. Discuta uma resposta a essa questão.

VIII. Força de Coriolis

A força de Coriolis, como a força centrífuga, é um efeito devido ao caráter não inercial do referencial adotado para descrever o movimento e não pode ser atribuída a qualquer interação fundamental.

Os efeitos da força de Coriolis podem ser observados, por exemplo, no movimento dos ventos em volta dos centros de baixa pressão e na rotação do plano de oscilação de um pêndulo simples (pêndulo de Foucault).

Para compreender como aparece a força de Coriolis, vamos considerar o movimento plano de uma partícula em dois referenciais diferentes, um referencial inercial S (eixos X e Y) e um referencial não inercial S* (eixos X* e Y*).

O referencial não inercial S* gira em sentido anti-horário, com velocidade angular ω , em relação ao referencial inercial S. Os dois referenciais têm origens no mesmo ponto e o eixo ao redor do qual o referencial S* gira passa por esse ponto e é

perpendicular ao plano dos eixos X e Y e também perpendicular ao plano dos eixos X* e Y* (Fig.15).

Vamos considerar também que, no referencial inercial S, a partícula se movimenta em MRU sobre o eixo X, deslocando-se do ponto A ao ponto B durante o intervalo de tempo Δt . Além disso, no instante em que a partícula se encontra no ponto A, os eixos X e X* coincidem, assim como coincidem os eixos Y e Y*.

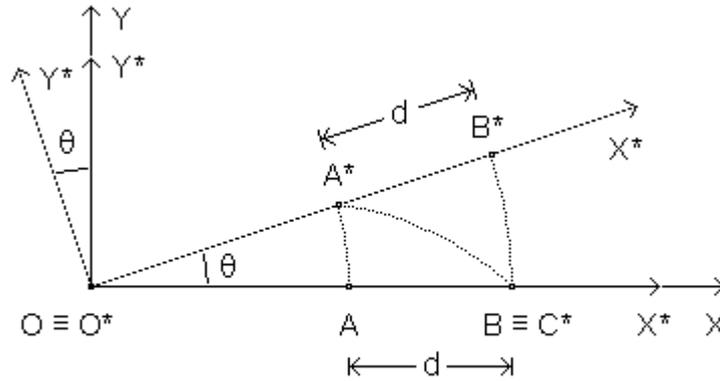


Fig.15

Durante o intervalo de tempo Δt , durante o qual a partícula se desloca do ponto A ao ponto B no referencial S, ela se desloca do ponto A* ao ponto C* no referencial S*, com um movimento curvilíneo que pode ser decomposto em um MRU, do ponto A* ao ponto B* sobre o eixo X*, e um MRUV, do ponto B* ao ponto C*, na direção do eixo Y* e em sentido contrário àquele considerado como positivo para esse eixo.

No referencial S*, a velocidade da partícula entre os pontos A* e B* tem módulo constante dado por:

$$v^* = \frac{d}{\Delta t}$$

Por outro lado, neste referencial, os pontos A e B têm velocidades com módulos:

$$v_A^* = \omega R_A^*$$

e

$$v_B^* = \omega R_B^*$$

em que R_A^* representa a distância do ponto A* à origem do referencial e R_B^* representa a distância do ponto B* à origem do referencial. Sendo assim, a distância d^* percorrida pela partícula no seu MRUV entre os pontos B* e C* pode ser escrita de duas maneiras:

$$d^* = v_A^* \Delta t + \frac{1}{2} a^* (\Delta t)^2$$

e

$$d^* = \omega R_B^* \Delta t$$

de modo que:

$$\omega R_B^* \Delta t = v_A^* \Delta t + \frac{1}{2} a^* (\Delta t)^2$$

Aqui, a^* representa o módulo da aceleração ao longo da trajetória curvilínea entre os pontos B^* e C^* . Essa aceleração tem a direção do eixo Y^* e sentido contrário àquele escolhido como positivo para ele.

Agora, como:

$$v_A^* = \omega R_A^*$$

e

$$R_B^* - R_A^* = v^* \Delta t$$

segue-se que:

$$a^* = 2\omega v^*$$

A aceleração a^* , cujo módulo é dado pela expressão acima, é perpendicular às direções das velocidades v^* e ω e pode ser escrita, de forma mais geral, do seguinte modo:

$$a^* = 2v^* \times \omega$$

Esta aceleração só aparece quando o movimento da partícula é observado em um referencial não inercial.

Caso a partícula tenha massa m , a força associada à essa aceleração, chamada de força de Coriolis, é dada por:

$$F = 2m v^* \times \omega$$

Os efeitos da força de Coriolis podem ser observados no movimento dos ventos em volta dos centros atmosféricos de baixa pressão e também na rotação do plano vertical de oscilação de um pêndulo simples num referencial fixo na superfície da Terra (pêndulo de Foucault).

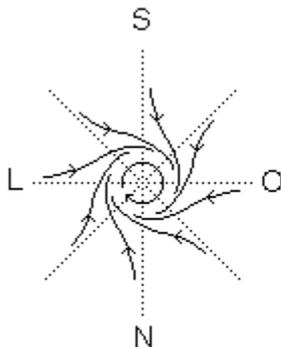
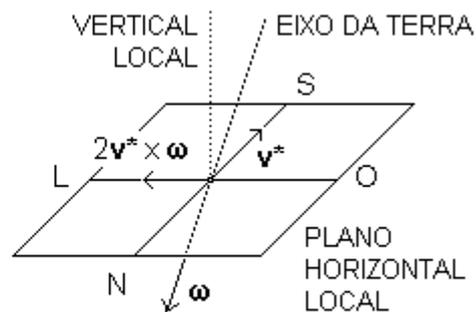


Fig.18(a)



(b)

Sob certas condições, uma dada região da atmosfera pode ter uma pressão abaixo da pressão atmosférica normal. Nestas condições, o ar da vizinhança flui para esta região de baixa pressão e as moléculas têm sua velocidade ao longo das linhas de fluxo desviadas para a esquerda, no Hemisfério Sul, por efeito da força de Coriolis. Com isso, formam-se redemoinhos com grandes quantidades de ar girando para a direita (Fig.16(a) e (b)).

Do mesmo modo que grandes quantidades de ar são desviadas para a esquerda no Hemisfério Sul, a partícula que constitui um pêndulo simples também é desviada, de modo que o plano de oscilação gira ao redor de um eixo vertical em sentido anti-horário (Fig.17). O efeito da força de Coriolis sobre o plano de oscilação de um pêndulo simples foi demonstrado por Foucault em 1851, em Paris, com um pêndulo de 67 m de comprimento, cujo plano de oscilação girava pouco mais que 11° por hora.

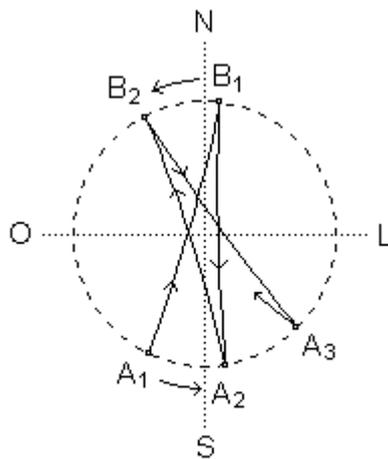


Fig.17

No Hemisfério Norte, os desvios devido à força de Coriolis têm sentidos contrários àqueles que ocorrem no Hemisfério Sul.

Exercício

Na Amazônia, um índio se coloca exatamente sobre a linha do Equador e dispara, na horizontal, uma flecha em direção ao Norte e outra em direção ao Leste. As duas flechas percorrem 200 m em 5 s. (a) Calcule o módulo do peso de cada flecha sabendo que sua massa é de 0,2 kg. (b) Determine o módulo, a direção e o sentido da força de Coriolis sobre cada flecha. (c) Compare os resultados dos itens (a) e (b). (d) Determine o valor do desvio de cada flecha devido à força de Coriolis.

MOVIMENTO HARMÔNICO SIMPLES

I. Introdução

Oscilar significa mover-se de um lado para outro, movimentar-se em sentidos opostos, alternadamente, mover-se, tornando a passar (ao menos aproximadamente) pelas mesmas posições. Assim, uma partícula que se movimenta para frente e para trás ao redor de um ponto dado está em um movimento oscilatório. Periódico significa que se repete com intervalos regulares. Assim, uma partícula que se movimenta de modo que, em intervalos de tempos iguais, o movimento se repete identicamente, está em um movimento periódico. Uma partícula que se movimenta para frente e para trás, ao redor de um ponto fixo, e para a qual o movimento se repete identicamente em intervalos de tempo iguais, está em um movimento periódico oscilatório.

II. MHS como Projeção do MCU

O movimento harmônico simples (MHS) é um tipo particular de movimento periódico oscilatório em que a partícula se move, num dado referencial, sobre uma reta, de modo que a intensidade da força que tende a levá-la ao ponto fixo nesse mesmo referencial cresce na mesma proporção em que aumenta o seu afastamento deste mencionado ponto fixo.

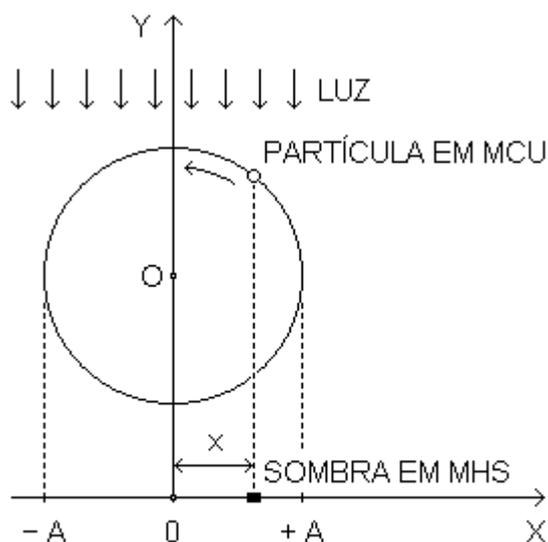


Fig.1

O movimento harmônico simples pode ser visto como a projeção ortogonal do movimento circular uniforme (MCU) sobre qualquer diâmetro (ou qualquer reta paralela a qualquer diâmetro) da circunferência que constitui a trajetória da partícula no referencial considerado. Como exemplo concreto (Fig.1), podemos imaginar uma partícula em MCU num plano vertical, com luz incidindo verticalmente, de cima para baixo. A sombra da partícula, numa superfície horizontal, descreve um MHS.

A grandeza x , que representa a posição da partícula no MHS, é chamada de alongação. Em outras palavras, a alongação é a distância da partícula à origem do eixo X com um sinal que, se é positivo, indica que a partícula se encontra na porção positiva do eixo X, e se é negativo, indica que a partícula se encontra na porção negativa do eixo X. A distância A , que vai da origem do eixo X até qualquer um dos pontos de retorno da partícula, é chamada de amplitude. A amplitude do MHS tem o mesmo valor que o raio da trajetória da partícula no MCU correspondente.

Exemplo 1

Para explorar a idéia do MHS como projeção ortogonal do MCU, vamos discutir o conceito de alongação. Para isso, desenhamos uma circunferência com raio de aproximadamente 10 cm, assinalamos 16 pontos equidistantes sobre a circunferência e identificamos esses pontos pelos números 0, 1, 2, 3, ... 15 (Fig.2). Na seqüência, projetamos esses pontos sobre o diâmetro horizontal, por onde fazemos passar o eixo X do referencial considerado (com origem no centro da circunferência) e identificamos as projeções pelos mesmos números com asterisco.

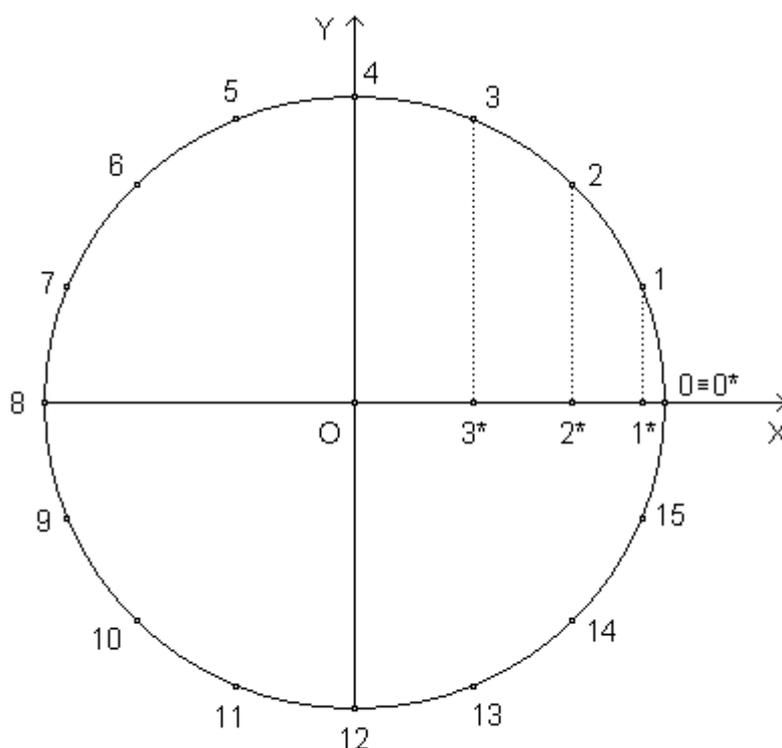


Fig.2

Os pontos indicados pelos números de zero a 15 representam posições de uma partícula em MCU. Os pontos indicados pelos mesmos números com asterisco representam posições de uma partícula em MHS.

No caso da partícula em MHS, a distância da origem O ao ponto 0^* é sua alongação x_0 , a distância da origem O ao ponto 1^* é sua alongação x_1 , a distância da origem O ao ponto 2^* é sua alongação x_2 , a distância da origem O ao ponto 3^* é sua alongação x_3 , e assim por diante.

Na Fig. 2, podemos observar que, a partir do quinto ponto, os valores das elongações se repetem e também que as elongações associadas aos pontos 5*, 6*, 7*, 8*, 9*, 10* e 11* são negativas porque as correspondentes posições da partícula em MHS estão na porção negativa do eixo X.

A partícula em MCU percorre a distância entre dois pontos adjacentes da sua trajetória num intervalo de tempo:

$$\Delta t = \frac{T}{16}$$

em que T representa o período do seu movimento. Neste mesmo intervalo de tempo, o ângulo varrido pela linha que vai da partícula em MCU até o centro da sua trajetória, em radianos, é:

$$\theta_u = \frac{2\pi}{16}$$

Podemos medir, com uma régua, os valores das elongações na Fig.2 e, com os dados obtidos, construir o gráfico da elongação da partícula em MHS em função do ângulo varrido pela linha que vai da partícula em MCU até o centro da sua trajetória, tomando θ_u como unidade (Fig.3).

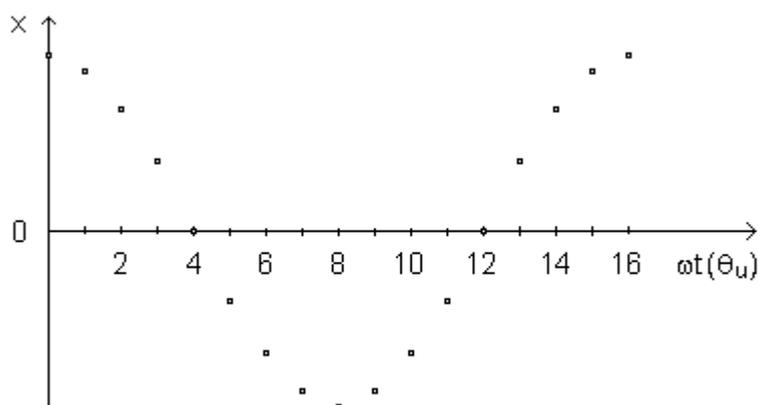


Fig.3

A Fig.3 representa o gráfico da elongação de uma partícula em MHS para um intervalo de tempo igual ao período do movimento. A partir daí, a forma do gráfico se repete periodicamente. O gráfico obtido corresponde ao gráfico da função cosseno da Trigonometria.

Sendo assim, se a posição inicial da partícula em MHS é aquela representada por 0* na Fig.2, a função $x(t)$, que representa a elongação da partícula, é proporcional a $\cos \omega t$:

$$x(t) \propto \cos \omega t$$

No contexto do MCU, a letra grega ω representa o módulo da velocidade angular da partícula. No contexto do MHS, a mesma letra representa a freqüência

angular. Esta grandeza está relacionada com a frequência f do movimento pela seguinte relação, que demonstraremos mais tarde:

$$\omega = 2\pi f$$

Exemplo 2

Continuando a explorar a ideia do MHS como projeção ortogonal do MCU, vamos discutir o conceito de velocidade. Para isso, desenhamos novamente uma circunferência com raio de aproximadamente 10 cm, assinalamos 16 pontos equidistantes sobre a circunferência e identificamos esses pontos pelos números 0, 1, 2, 3, ... 15. Na sequência, projetamos esses pontos sobre o diâmetro horizontal, por onde fazemos passar o eixo X do referencial considerado (com origem no centro da circunferência) e identificamos as projeções pelos mesmos números com asterisco. Os pontos indicados pelos números de zero a 15 representam posições de uma partícula em MCU. Os pontos indicados pelos mesmos números com asterisco representam posições de uma partícula em MHS (Fig.4).

A partir dos pontos sobre a circunferência, desenhamos flechas com aproximadamente 3 cm de comprimento para representar os correspondentes vetores velocidades lineares, $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, etc., da partícula em MCU. As flechas devem ter o mesmo tamanho e devem tangenciar a circunferência nos pontos considerados.

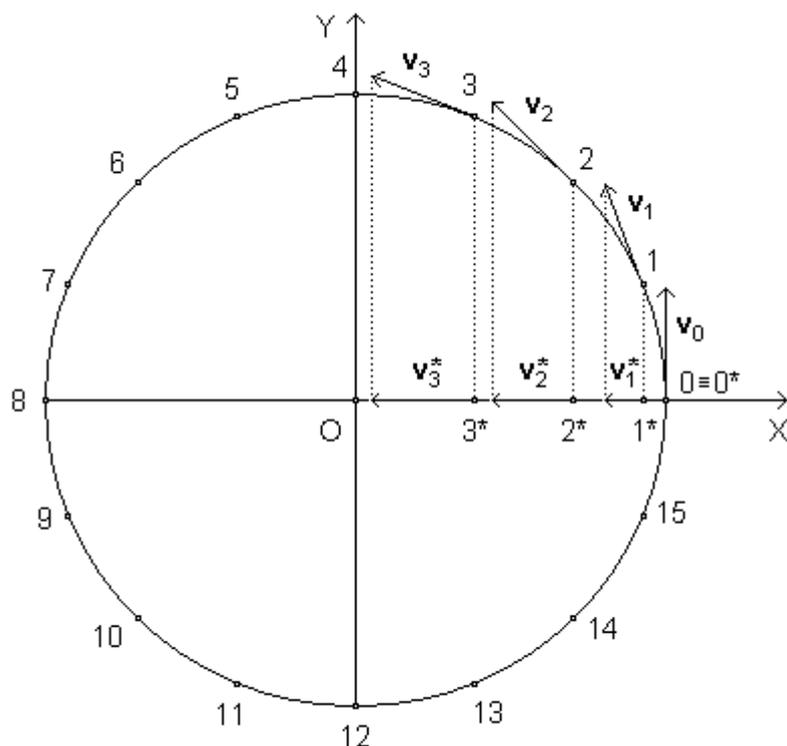


Fig.4

Agora, projetamos ortogonalmente cada uma das 16 flechas sobre o eixo X. As projeções, indicadas por $\mathbf{v}_0^*, \mathbf{v}_1^*, \mathbf{v}_2^*, \mathbf{v}_3^*$, etc., representam os correspondentes vetores velocidades da partícula em MHS. As flechas sobre o eixo X têm tamanhos

diferentes, indicando que o módulo da velocidade da partícula em MHS varia no tempo.

Na Fig. 4, podemos observar que, a partir do quinto ponto, os tamanhos das flechas no eixo X se repetem e também podemos observar que as flechas associadas aos pontos 0* e 8* têm comprimento zero, indicando que as correspondentes velocidades da partícula em MHS são nulas. Além disso, as flechas associadas aos pontos 1*, 2*, 3*, 4*, 5*, 6* e 7* têm sentido oposto àquele convencionado como positivo para o eixo X.

Podemos medir, com uma régua, os comprimentos das flechas sobre o eixo X e, com os dados obtidos, construir o gráfico do módulo e do sentido da velocidade da partícula em MHS em função do ângulo varrido pela linha que vai da partícula em MCU até o centro da sua trajetória, tomando, novamente, θ_u , dada pela expressão:

$$\theta_u = \frac{2\pi}{16}$$

como unidade (Fig.5). O sentido de cada velocidade é indicado pelo sinal positivo ou negativo, conforme o vetor velocidade correspondente tenha o mesmo sentido ou o sentido oposto àquele convencionado como positivo para o eixo X.

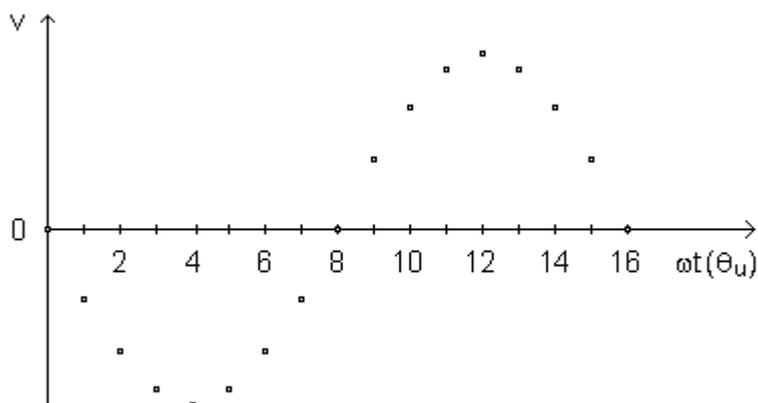


Fig.5

A Fig.5 representa o gráfico do módulo e do sentido da velocidade de uma partícula em MHS para um intervalo de tempo igual ao período do movimento. A partir daí, a forma do gráfico se repete periodicamente. O gráfico obtido corresponde ao gráfico da função seno da Trigonometria, com o sinal negativo.

Sendo assim, se a posição inicial da partícula em MHS é aquela representada por 0* na Fig.4, a função $v(t)$, que representa o módulo e o sentido da velocidade instantânea, é proporcional a $-\text{sen } \omega t$:

$$v(t) \propto -\text{sen } \omega t$$

Exemplo 3

Continuando a explorar a idéia do MHS como projeção ortogonal do MCU, vamos discutir o conceito de aceleração. Para isso, desenhamos novamente uma circunferência com raio de aproximadamente 10 cm, assinalamos 16 pontos

eqüidistantes sobre a circunferência e identificamos esses pontos pelos números 0, 1, 2, 3, ... 15.

Na seqüência, projetamos esses pontos sobre o diâmetro horizontal, por onde fazemos passar o eixo X do referencial considerado (com origem no centro da circunferência) e identificamos as projeções pelos mesmos números com asterisco. Os pontos indicados pelos números de zero a 15 representam posições de uma partícula em MCU. Os pontos indicados pelos mesmos números com asterisco representam posições de uma partícula em MHS.

A partir dos pontos sobre a circunferência, desenhamos flechas com aproximadamente 3 cm de comprimento para representar os correspondentes vetores acelerações centrípetas, $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, etc., da partícula em MCU. Todas as flechas devem ter o mesmo tamanho e todas devem apontar para o centro da circunferência (Fig.6).

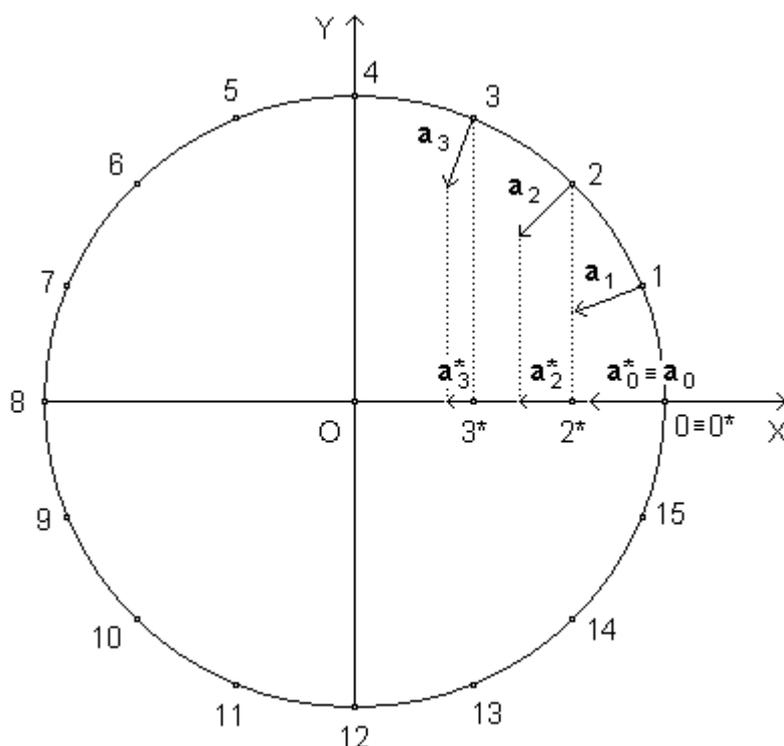


Fig.6

Agora, projetamos ortogonalmente cada uma das 16 flechas sobre o eixo X. Essas projeções, indicadas por $\mathbf{a}_0^*, \mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \mathbf{a}_3^*$, etc., representam os correspondentes vetores acelerações da partícula em MHS. Na Fig.6, não desenhamos \mathbf{a}_1^* para que o desenho ficasse mais claro.

As flechas sobre o eixo X têm tamanhos diferentes, indicando que o módulo da aceleração da partícula em MHS varia no tempo.

Na Fig. 6, podemos observar que, a partir do quinto ponto, os tamanhos das flechas no eixo X se repetem e também podemos observar que as flechas associadas aos pontos 4^* e 12^* têm comprimento zero, indicando que as correspondentes acelerações da partícula em MHS são nulas. Além disso, as flechas associadas aos pontos $0^*, 1^*, 2^*, 3^*, 13^*, 14^*$ e 15^* têm sentido oposto àquele convencionalizado como positivo para o eixo X.

Podemos medir, com uma régua, os comprimentos das flechas sobre o eixo X e, com os dados obtidos, construir o gráfico do módulo e do sentido da aceleração da partícula em MHS em função do ângulo varrido pela linha que vai da partícula em MCU até o centro da sua trajetória, tomando, ainda mais uma vez, θ_u , dada pela expressão:

$$\theta_u = \frac{2\pi}{16}$$

como unidade (Fig.7). O sentido de cada aceleração é indicado pelo sinal positivo ou negativo, conforme o vetor aceleração correspondente tenha o mesmo sentido ou o sentido oposto àquele convencionado como positivo para o eixo X.

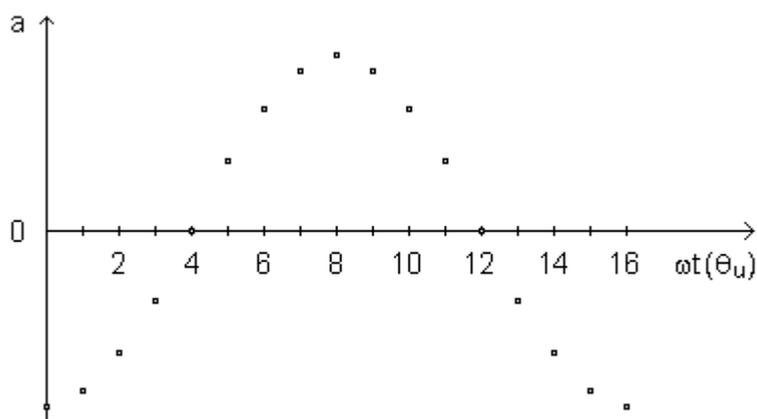


Fig.7

A Fig.7 representa o gráfico do módulo e do sentido da aceleração de uma partícula em MHS para um intervalo de tempo igual ao período do movimento. A partir daí, a forma do gráfico se repete periodicamente. O gráfico obtido corresponde ao gráfico da função cosseno da Trigonometria, com o sinal negativo.

Sendo assim, se a posição inicial da partícula em MHS é aquela representada por 0^* na Fig.6, a função $a(t)$, que representa o módulo e o sentido da aceleração instantânea, é proporcional a $-\cos \omega t$:

$$a(t) \propto -\cos \omega t$$

III. Relações Matemáticas

A partir dos três exemplos discutidos acima, baseados na idéia do movimento harmônico simples como uma projeção ortogonal de um movimento circular uniforme sobre qualquer diâmetro (ou qualquer reta paralela a qualquer diâmetro) da circunferência que constitui a trajetória da partícula, pudemos concluir que, nas condições dadas, a função que representa a elongação da partícula em MHS é proporcional a $\cos \omega t$:

$$x(t) \propto \cos \omega t$$

e a função que representa o módulo e o sentido da velocidade da partícula em MHS é proporcional $-\text{sen } \omega t$:

$$v(t) \propto -\text{sen } \omega t$$

e a função que representa o módulo e o sentido da aceleração da partícula em MHS é proporcional a $-\text{cos } \omega t$:

$$a(t) \propto -\text{cos } \omega t$$

Para alcançar uma descrição completa do movimento harmônico simples, precisamos transformar estas três relações de proporcionalidade em igualdades matemáticas. Para fazer isso, vamos formalizar matematicamente a idéia do movimento harmônico simples como projeção ortogonal de um movimento circular uniforme.

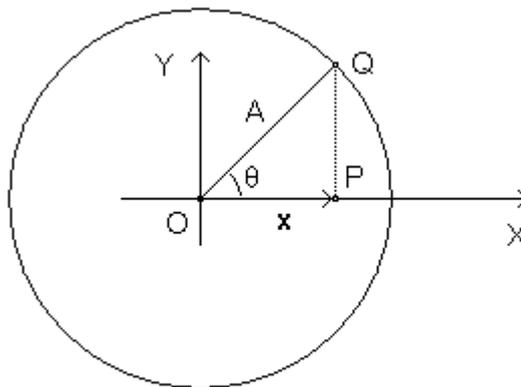


Fig.8

Se a posição da partícula em MCU, representada pelo ponto Q, e a posição da partícula em MHS, representada pelo ponto P, coincidem em $t = 0$, o ângulo entre o segmento OQ e o eixo X no instante posterior t é:

$$\theta = \omega t$$

em que ω representa o módulo da velocidade angular do MCU (Fig.8). O triângulo OQP é um triângulo retângulo de modo que podemos escrever:

$$\cos \omega t = \frac{x(t)}{A}$$

e daí:

$$x(t) = A \cos \omega t$$

Nesta expressão, x representa a elongação, ω , a frequência angular e A , a amplitude do movimento da partícula em MHS.

Por outro lado, o módulo da velocidade linear da partícula em MCU pode ser escrito $v_L = A\omega$ (Fig.9). O triângulo QMN é um triângulo retângulo de modo que podemos escrever:

$$\text{sen}\omega t = \frac{-v(t)}{v_L} = -\frac{v(t)}{A\omega}$$

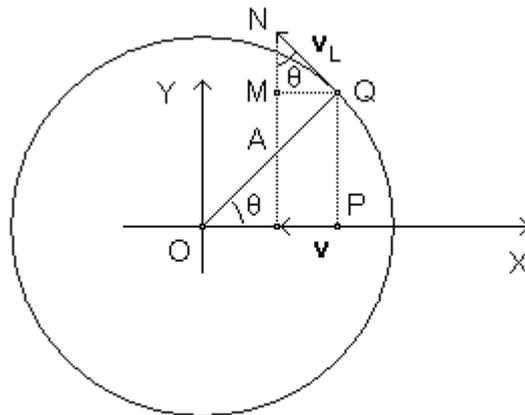


Fig.9

Nesta expressão, introduzimos o sinal negativo para que $v(t)$ represente o módulo e o sentido do vetor velocidade da partícula em MHS. Para $0 < \omega t < \pi$, temos $\text{sen}\omega t > 0$ e o vetor velocidade tem sentido oposto àquele escolhido como positivo para o eixo X. Para $\pi < \omega t < 2\pi$, temos $\text{sen}\omega t < 0$ e o vetor velocidade tem o mesmo sentido daquele escolhido como positivo para o eixo X. Assim, para qualquer ângulo ωt , ou seja, em qualquer instante de tempo considerado, a função $\text{sen}\omega t$ tem o sinal contrário àquele que indica o sentido da velocidade v da partícula em MHS.

Da expressão acima vem:

$$v(t) = -A\omega \text{sen}\omega t$$

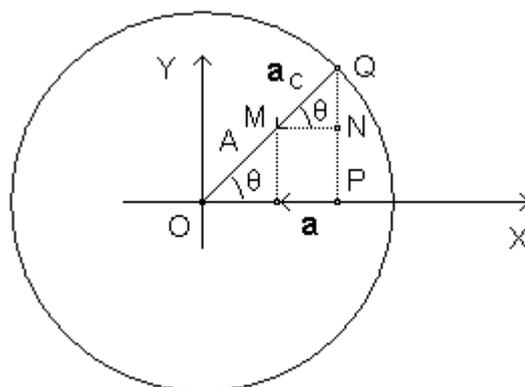


Fig.10

O módulo da aceleração centrípeta da partícula em MCU (Fig.10) é dado por:

$$a_c = \frac{v^2}{A} = A\omega^2$$

O triângulo MNQ é um triângulo retângulo de modo que podemos escrever:

$$\cos \omega t = \frac{-a(t)}{a_c} = -\frac{a(t)}{A\omega^2}$$

Nesta expressão, introduzimos o sinal negativo para que $a(t)$ represente o módulo e o sentido da aceleração da partícula em MHS.

Para $0 < \omega t < \pi / 2$ e para $3\pi / 2 < \omega t < 2\pi$, temos $\cos \omega t > 0$ e o vetor aceleração tem sentido oposto àquele escolhido como positivo para o eixo X.

Para $\pi / 2 < \omega t < 3\pi / 2$, temos $\cos \omega t < 0$ e o vetor aceleração tem o mesmo sentido daquele escolhido como positivo para o eixo X. Assim, para qualquer ângulo ωt , ou seja, em qualquer instante de tempo considerado, a função $\cos \omega t$ tem o sinal contrário àquele que indica o sentido da aceleração a da partícula em MHS.

Da expressão acima vem:

$$a(t) = -A\omega^2 \cos \omega t$$

As expressões deduzidas acima valem para o caso em que a posição da partícula em MCU, representada pelo ponto Q, e a posição da partícula em MHS, representada pelo ponto P, coincidem em $t = 0$, isto é, valem para o caso em que:

$$x(0) = A$$

Em outras palavras, as expressões valem para o caso particular em que a partícula começa a ser observada quando se encontra no ponto correspondente à elongação máxima.

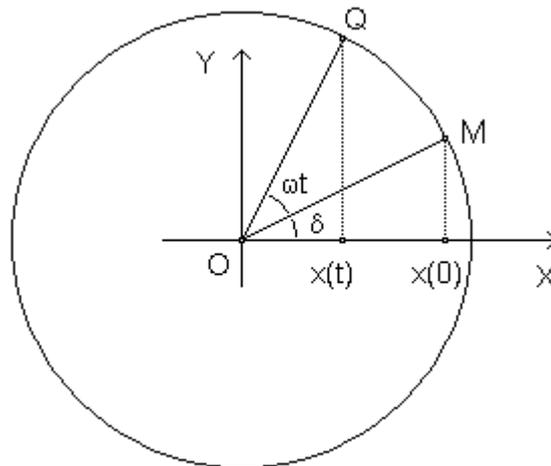


Fig.11

Expressões gerais podem ser escritas do seguinte modo:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \delta)$$

e

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \delta)$$

em que δ , a fase inicial, está relacionada à elongação inicial (Fig.11) pela expressão:

$$x(0) = A \cos \delta$$

Desse modo, a fase inicial permite descrever movimentos harmônicos simples nos quais a posição inicial da partícula não coincide com a posição associada à elongação máxima.

IV. Definição de MHS

Para dar uma definição de MHS que seja independente do MCU, podemos comparar as expressões deduzidas acima, para a elongação e para o módulo e o sentido da aceleração de uma partícula em MHS. Isso permite escrever:

$$a = -\omega^2 x$$

Então, multiplicando os dois lados da igualdade pela massa m da partícula e levando em conta a segunda lei de Newton, obtemos:

$$F(x) = -Cx$$

com

$$C = m\omega^2$$

Aqui, $F(x)$ representa o módulo e o sentido da força resultante sobre a partícula. Por isso, podemos dizer que uma partícula está em MHS quando se move sobre uma linha reta (Fig.12), sob o efeito de uma força cujo módulo é proporcional ao afastamento da partícula de um ponto fixo sobre esta reta e dirigida para esse ponto.

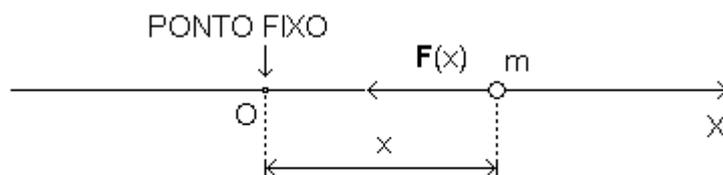


Fig.12

Uma força que, atuando sobre uma partícula, tem a propriedade de estar sempre dirigida a um ponto fixo, é chamada de força restauradora. A força que governa o MHS é uma força restauradora cujo módulo é proporcional ao afastamento da partícula do ponto fixo considerado.

Período

Período é o intervalo de tempo levado pela partícula para completar uma oscilação. Assim, simbolizando o período por T , dessa definição temos:

$$x(t) = x(t + T)$$

Usando a expressão deduzida acima para a elongação de uma partícula em MHS segue-se que:

$$A \cos \omega t = A \cos(\omega t + \omega T)$$

ou:

$$\cos \omega t = \cos(\omega t + \omega T)$$

Por outro lado, sabemos, da Trigonometria, que a função cosseno é uma função periódica:

$$\cos \omega t = \cos(\omega t + 2\pi)$$

de modo que devemos ter:

$$\omega T = 2\pi$$

e daí:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Esta expressão mostra que o período de oscilação de qualquer oscilador harmônico é independente da amplitude do movimento. Por isso, para que o ritmo de andamento dos ponteiros não se altere por efeito de pequenas mudanças acidentais na correspondente amplitude de vibração, os dispositivos básicos apropriados para serem usados na construção de relógios são osciladores harmônicos. Praticamente todos os relógios modernos estão baseados em um tipo ou outro de oscilador harmônico, inclusive osciladores não mecânicos.

Frequência

Frequência é o número de oscilações realizadas pela partícula por unidade de tempo. Assim, simbolizando a frequência por f , dessa definição temos:

$$f = \frac{1}{T}$$

ou:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Exercício 1

Num dado referencial, a posição de uma partícula em MHS varia com o tempo segundo o gráfico da Fig.13.

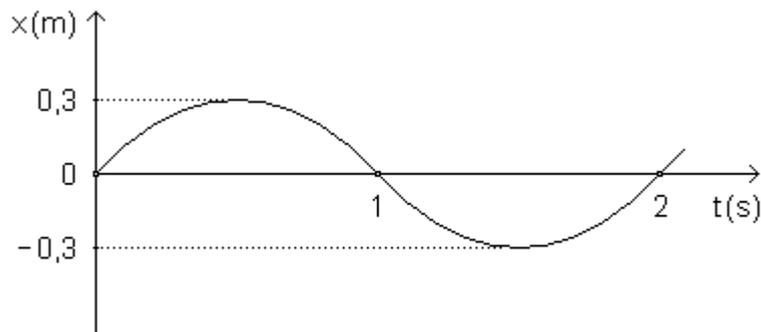


Fig.13

Determine a amplitude, a frequência e a equação da elongação dessa partícula em função do tempo.

Exercício 2

Num dado referencial, uma partícula se move num MHS com a seguinte equação horária:

$$x(t) = 10 \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

com x em metros e t em segundos. (a) Calcule a frequência, a amplitude e o período desse movimento. (b) Faça o gráfico x contra t e discuta a fase inicial.

Exercício 3

Calcule o módulo da velocidade e o módulo da aceleração da partícula do exercício anterior em $t = 3$ s.

Exercício 4

Um corpo com massa de 5 kg executa um MHS com amplitude de 2 m e período de 6 s. Calcule o valor máximo do módulo da resultante das forças que atuam sobre o corpo.

V. Pêndulo Simples

Um corpo suspenso por um fio, afastado da posição de equilíbrio sobre a linha vertical que passa pelo ponto de suspensão, e abandonado, oscila. O corpo e o fio formam o objeto que chamamos de pêndulo. Vamos discutir um modelo chamado de pêndulo simples, construído para descrever um pêndulo. Esse modelo é apropriado

para descrever um pêndulo que oscila com amplitude pequena, isto é, com amplitude muito menor do que o comprimento do fio.

O pêndulo simples consiste de uma partícula de massa m suspensa por um fio sem massa e inextensível de comprimento L (Fig.14). Afastada da posição de equilíbrio, sobre a linha vertical que passa pelo ponto de suspensão Q , e abandonada, a partícula oscila com amplitude A . Se a amplitude é pequena ($A \ll L$), a partícula descreve um MHS num referencial fixo no ponto de suspensão.

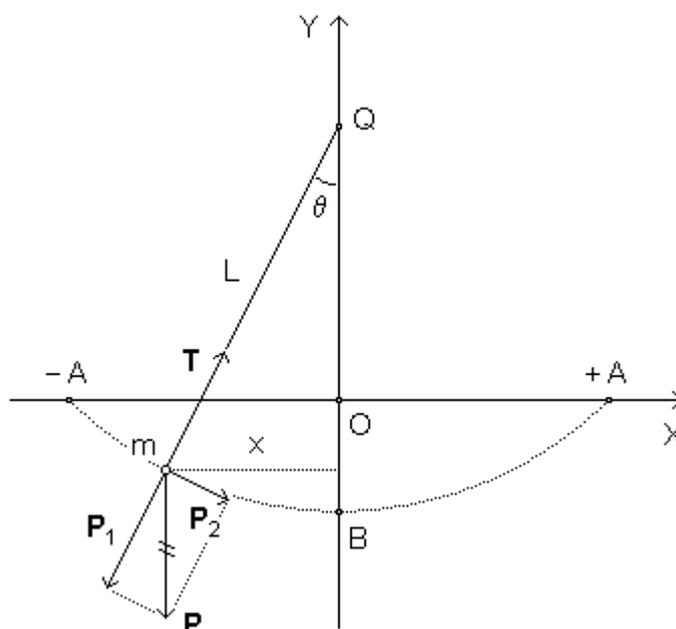


Fig.14

As forças importantes que atuam sobre a partícula são: a força peso, \mathbf{P} , exercida pela Terra, e a tensão, \mathbf{T} , exercida pelo fio. Por conveniência, podemos substituir a força peso pelas duas componentes ortogonais, \mathbf{P}_1 , paralela à direção definida pelo fio, e \mathbf{P}_2 , perpendicular à essa direção. Em módulo, temos:

$$P_1 = mg \cos \theta$$

e

$$P_2 = mg \sin \theta$$

Desse modo, podemos dizer que as forças que atuam sobre a partícula que forma o pêndulo simples são \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 e \mathbf{T} .

Como a partícula descreve um arco de circunferência, a resultante das forças ao longo da direção definida pelo fio atua como força centrípeta e, por isso, deve ter o mesmo sentido que a tensão \mathbf{T} .

Por outro lado, na direção perpendicular àquela definida pelo fio, isto é, ao longo da trajetória da partícula, atua apenas a força \mathbf{P}_2 . Estritamente falando, ao longo desta direção atua também a força de arraste, exercida pelo ar. Contudo, como o módulo dessa força é muito menor do que o módulo da força \mathbf{P}_2 , ela pode ser desprezada (e nem foi representada na Fig.14).

Como já dissemos acima, a partícula de massa m descreve um arco de circunferência. Porém, se a amplitude do movimento é muito menor do que o comprimento do fio, isto é, se $A \ll L$, qualquer que seja o ângulo θ , ele sempre é pequeno (Fig.15).

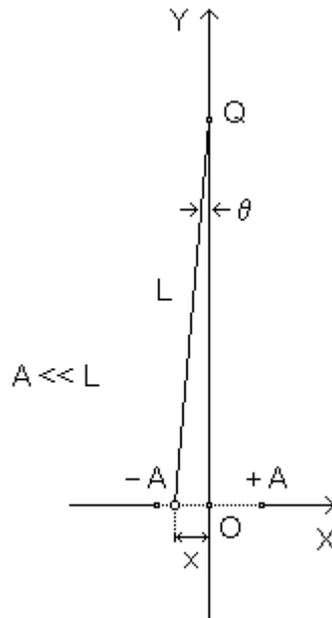


Fig.15

Nesse caso, o arco de circunferência que forma a trajetória da partícula pode ser aproximado por um segmento de reta horizontal, sobre o qual fixamos o eixo X, com origem O onde a vertical tirada do ponto de suspensão Q corta esse eixo. Então, dentro dessa aproximação, a posição da partícula e os pontos O e Q formam um triângulo retângulo (com ângulo reto em O) e podemos escrever:

$$\text{sen } \theta = \frac{x}{L}$$

O módulo e o sentido de \mathbf{P}_2 , que é a força resultante que atua sobre a partícula ao longo da sua trajetória, podem ser expressos por:

$$P_2(x) = -\left(\frac{mg}{L}\right) x$$

O sinal negativo aparece porque a força \mathbf{P}_2 tem o mesmo sentido daquele escolhido como positivo para o eixo X quando a elongação é negativa e tem sentido contrário quanto a elongação é positiva.

A expressão acima mostra que, se é pequena a amplitude do movimento da partícula, podemos considerar que ele acontece sobre uma linha reta (o eixo X), sob o efeito de uma força cujo módulo é proporcional à distância da partícula a um ponto fixo sobre esta linha reta (o ponto O) e dirigida para esse ponto. Em outras palavras, se a

amplitude é pequena, o movimento da partícula que faz parte do pêndulo simples é um MHS.

Sabemos que o módulo e o sentido da força que atua sobre uma partícula em MHS são dados, genericamente, por:

$$F(x) = -Cx$$

com

$$C = m\omega^2$$

e sabemos também que o período e a frequência do movimento são dados, respectivamente, por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

e

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Portanto, comparando a expressão de $P_2(x)$ com a expressão de $F(x)$, podemos escrever:

$$C = \frac{mg}{L}$$

e

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

de modo que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

e

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Dado L , o comprimento do pêndulo, e g , o módulo da aceleração gravitacional local, se não há qualquer outro agente externo além da força gravitacional atuando sobre o pêndulo, ele só pode oscilar com a frequência dada pela expressão acima. Esta frequência característica do pêndulo é chamada frequência própria ou frequência natural de oscilação.

Como já discutimos, uma das características importantes de qualquer oscilador harmônico é que o período de oscilação não depende da amplitude do movimento. Aqui reaparece esta característica já que a partícula que constitui o pêndulo simples descreve um MHS. Mas isto só é verdadeiro se a amplitude do movimento é muito menor do que o comprimento do fio.

Se a amplitude do movimento da partícula não é muito menor do que o comprimento do fio, o pêndulo não pode ser descrito como um oscilador harmônico porque a força restauradora deixa de ter módulo proporcional à distância da partícula a

um ponto fixo. Nesse caso, o período do movimento depende da amplitude do movimento de oscilação.

Se a amplitude do movimento é muito menor do que o comprimento do fio, qualquer que seja o ângulo θ , ele sempre é pequeno e o arco de circunferência que forma a trajetória da partícula pode ser aproximado por um segmento de reta horizontal. Então, além da expressão:

$$\text{sen } \theta = \frac{x}{L}$$

podemos escrever também:

$$\text{sen } \theta = \theta$$

desde que o ângulo θ seja dado em radianos. Desse modo, podemos dizer que o período do pêndulo simples independe da amplitude do movimento porque a força de restituição que atua sobre a partícula pode ser considerada proporcional a θ , o ângulo entre o fio e a vertical.

No caso em que a amplitude não é tão pequena, devemos levar em conta que a força de restituição não é proporcional ao ângulo θ , mas, sim, a $\text{sen } \theta$. Além disso, como $\text{sen } \theta < \theta$ (se $\theta \neq 0$), a força de restituição, nesse caso, é menor do que no caso anterior, qualquer que seja a posição da partícula. Portanto, também o módulo da aceleração da partícula é menor, ela demora mais tempo para completar uma oscilação e o período do movimento é maior.

Observação

Mostramos, acima, que um pêndulo simples, de comprimento L , que oscila com amplitude A , com $A \ll L$, tem um movimento harmônico simples com período dado pela expressão:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Esta expressão pode ser obtida porque a condição $A \ll L$ permite fazer a aproximação:

$$\text{sen } \theta = \frac{x}{L}$$

ou, de modo equivalente:

$$\text{sen } \theta = \theta$$

se o ângulo θ entre o fio e a vertical é dado em radianos. Então, quanto menor for a amplitude do movimento da partícula comparada ao comprimento do fio, mais exata é esta aproximação. O erro relativo cometido nessa aproximação pode ser calculado pela expressão:

$$\varepsilon = \frac{\theta - \text{sen } \theta}{\text{sen } \theta}$$

A tabela abaixo dá uma idéia do erro relativo cometido na aproximação.

θ (graus)	θ (rad)	$\text{sen } \theta$	ε (em %)
10	0,175	0,174	0,575
15	0,262	0,259	1,158
20	0,349	0,342	2,047
25	0,436	0,423	3,073
30	0,524	0,500	4,800
35	0,611	0,574	6,446

Exercício 1

Da expressão do período do pêndulo simples, segue-se que:

$$g = L \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

Assim, tomando um pêndulo com fio de comprimento L conhecido, cujo movimento se aproxima do movimento de um pêndulo simples, e medindo o período T do seu movimento de oscilação, determine g , o módulo da aceleração gravitacional local.

Para diminuir o efeito do tempo de reação, é conveniente determinar o período medindo, por exemplo, o intervalo de tempo Δt levado pelo pêndulo para completar 10 oscilações. Desse modo, se $L = 1,00 \text{ m}$ e $\Delta t = 20,23 \text{ s}$ vem:

$$g = (1,00 \text{ m}) \left(\frac{20\pi}{20,23 \text{ s}} \right)^2 = 9,65 \text{ m/s}^2$$

Um modo de aumentar a precisão do experimento é aumentar o número de oscilações para a medida do intervalo de tempo Δt , de modo que qualquer imprecisão nesta medida tem seu efeito no cálculo de g reduzido na mesma proporção. Para poder aumentar o número de oscilações, a resistência do ar deve ser minimizada, já que tende a reduzir a amplitude das oscilações. Um modo de reduzir o efeito da resistência do ar é reduzir o volume do corpo que vai constituir o pêndulo sem reduzir, na mesma proporção, a sua inércia. Por isso, uma pequena esfera de aço ou de chumbo é bastante adequada. De qualquer modo, como o período de oscilação é independente da amplitude, esse efeito da resistência do ar não influencia no resultado final e limita, apenas, o número de oscilações que pode ser tomado na medida de Δt .

Exercício 2

Dois pêndulos, de comprimentos $L_1 = 1\text{ m}$ e $L_2 = 0,64\text{ m}$, suspensos de pontos diferentes do teto de uma sala, são abandonados com suas partículas em contato (Fig.16). Considerando um referencial fixo na Terra, calcule o tempo levado para que as partículas se encontrem novamente na mesma posição.

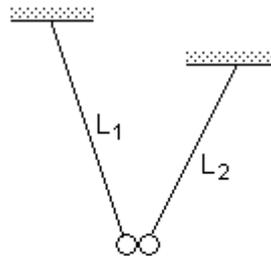


Fig.16

Exercício 3

Considere um pêndulo de 2 m de comprimento suspenso do teto de um elevador, oscilando com pequenas amplitudes num referencial fixo na Terra. Calcule a frequência desse pêndulo (a) quando o elevador está em repouso no referencial considerado, (b) quando o elevador sobe com aceleração de módulo 2 m/s^2 e (c) quando o elevador desce com aceleração de módulo 2 m/s^2 .

Exercício 4

A Fig.17 representa um prego no ponto P e um pêndulo de comprimento L, suspenso do ponto A do teto de uma sala.

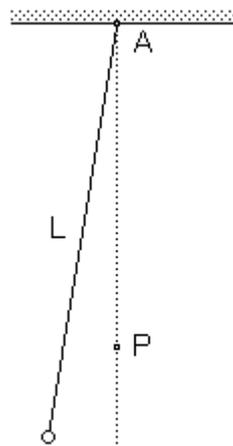


Fig.17

O pêndulo oscila com pequenas amplitudes num referencial fixo na Terra. Os pontos P e A estão sobre a mesma linha vertical. Sem o prego, o período de oscilação do pêndulo é T. Calcule o período de oscilação do pêndulo com o prego, sabendo que a distância entre os pontos A e P é $3L/4$.

Exercício 5

Um relógio de pêndulo é calibrado num dia em que a temperatura ambiente é de $25\text{ }^{\circ}\text{C}$. Discuta as seguintes afirmativas: (a) num dia em que a temperatura ambiente é de $35\text{ }^{\circ}\text{C}$, esse relógio atrasa e (b) se esse relógio é levado para a Lua e mantido a temperatura de $25\text{ }^{\circ}\text{C}$, ele adianta.

VI. Massa Gravitacional e Massa Inercial

Se a amplitude do movimento é muito menor do que o comprimento do fio, a partícula que faz parte de um pêndulo simples descreve, num referencial inercial fixo no ponto de suspensão, um MHS não usual porque o período do movimento não depende da massa da partícula. Assim, aumentando a massa da partícula, por um lado a sua inércia aumenta, com o efeito de tornar maior o período do movimento, e por outro lado o módulo do seu peso aumenta, ou seja, aumenta a intensidade da força restauradora, com o efeito de tornar menor o período do movimento. O período do movimento não se altera efetivamente porque estes dois efeitos se cancelam exatamente. Em outras palavras, o cancelamento dos dois efeitos referidos acima ocorre porque a massa da partícula que aparece na expressão do módulo do peso é igual à massa que aparece na expressão da segunda lei de Newton. Desse modo, a palavra massa está associada, na Física, a dois fenômenos, a primeira vista, totalmente diferentes.

Pela primeira lei de Newton, se é nula a força resultante sobre um corpo, os únicos estados de movimento possíveis para ele, num referencial inercial, são aqueles de velocidade constante (inclusive nula). A mudança de um estado para outro, com velocidade diferente, só é possível se sobre o corpo age uma força resultante não nula. Daí, pela segunda lei de Newton, a velocidade do corpo varia tanto mais rapidamente quanto menor for a sua massa. A palavra massa aparece, aqui, associada à inércia do corpo e é chamada de massa inercial.

Por outro lado, tomando dois corpos quaisquer 1 e 2, esféricos e com distribuições homogêneas de massa, a lei da gravitação universal de Newton afirma que os módulos F_{12} e F_{21} , da força com que o corpo 1 atrai o corpo 2 e da força com que o corpo 2 atrai o corpo 1, são dados por:

$$F_{12} = F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

em que:

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

é a constante da gravitação universal (a mesma para todos os corpos), m_1 e m_2 representam as massas dos corpos 1 e 2 e r , a distância entre os seus centros. Aqui, a palavra massa aparece associada a uma propriedade dos corpos que lhes permite interagir gravitacionalmente entre si e é chamada de massa gravitacional.

Se a distinção entre massa gravitacional (m_G) e massa inercial (m_{IN}) tivesse sido feita desde o início da demonstração da expressão para o período do MHS associado à partícula que faz parte de um pêndulo simples, teríamos:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_{IN} L}{m_G g}}$$

Com base nesta expressão, Newton idealizou o seguinte experimento para detectar qualquer diferença entre os dois tipos de massa: tomando como pingente de um pêndulo uma cápsula delgada e colocando dentro dela corpos de diferentes substâncias, cuidando para que o módulo do peso total fosse sempre o mesmo, para poder garantir que a massa gravitacional era sempre a mesma, Newton mediu o período das oscilações para cada caso. Assim, qualquer diferença no período das oscilações teria que ser atribuída a uma diferença na massa inercial. Em todos os casos experimentados, os períodos medidos por Newton tiveram o mesmo valor, igual àquele dado pela expressão:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Assim, Newton verificou experimentalmente, com a precisão possível na sua época, que $m_G = m_{IN}$. Depois de Newton, a precisão dos experimentos aumentou muito e, mesmo assim, não foi detectada nenhuma diferença entre o valor dos dois tipos de massa. Atualmente, com a Teoria da Relatividade Geral de Einstein, esta igualdade foi elevada à condição de princípio fundamental e, por isso, não se justifica mais a distinção entre massa inercial e massa gravitacional.

Exercício

(a) Discuta um fenômeno ou uma situação que pode ser imputada direta ou indiretamente à massa inercial de um objeto ou de uma partícula. (b) Discuta um fenômeno ou uma situação que pode ser imputada direta ou indiretamente à massa gravitacional de um objeto ou de uma partícula.

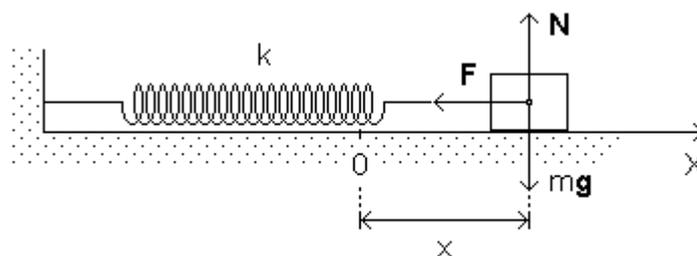


Fig.18

VII. Sistema Corpo-Mola

Um corpo de massa m se apóia sobre uma superfície horizontal sem atrito e está preso a uma mola (de massa desprezível) de constante elástica k (Fig.18). Se o

corpo é abandonado com a mola esticada ou comprimida, ele passa a se mover horizontalmente sob o efeito da força de restituição da mola, executando um MHS num referencial fixo na superfície horizontal.

Sobre o corpo existem três forças: a força peso, a força normal e a força da mola. Como as forças peso e normal cancelam-se mutuamente, a força resultante sobre o corpo é a força que a mola exerce sobre ele.

De acordo com a lei de Hooke, uma mola, à qual um agente externo dá uma elongação que aumenta ou diminui o seu comprimento de equilíbrio, tende a voltar ao seu comprimento original exercendo, sobre o agente externo, uma força de intensidade proporcional à elongação:

$$F = -kx$$

em que k é a constante elástica e x , a elongação da mola, isto é, o quanto ela foi esticada ou comprimida além do seu comprimento de equilíbrio. O sinal negativo aparece porque a força que a mola exerce sobre o agente externo tem o mesmo sentido daquele escolhido como positivo para o eixo X quando a elongação é negativa e tem sentido contrário quando a elongação é positiva.

Por outro lado, sabemos que o módulo e o sentido da força que atua sobre uma partícula em MHS são dados, genericamente, por:

$$F(x) = -Cx$$

com

$$C = m\omega^2$$

e sabemos também que o período e a frequência do movimento são dados, respectivamente, por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

e

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Portanto, comparando a expressão do módulo e do sentido da força que a mola exerce sobre o corpo com a expressão do módulo e do sentido da força que atua sobre uma partícula em MHS, podemos escrever:

$$k = m\omega^2$$

de modo que:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

e

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

A primeira expressão mostra que quanto maior é a massa da partícula, maior é o período do seu movimento oscilatório e quanto mais dura a mola, menor é esse mesmo período. Estas mesmas conclusões podem ser estabelecidas através de um argumento que leva em conta que o módulo da força exercida pela mola sobre o corpo depende da elongação da mola e de sua constante elástica.

Para desenvolver esse argumento, vamos considerar que, sem alterar a elongação da mola, o corpo preso a ela é substituído por outro, de massa maior. Qualquer que seja a elongação da mola, o módulo da força que ela exerce sobre o segundo corpo fica igual ao módulo da força que ela exerce sobre o primeiro corpo. Então, pela segunda lei de Newton, o módulo da aceleração instantânea do segundo corpo se torna menor do que o módulo da aceleração instantânea do primeiro corpo. Como a amplitude do movimento é a mesma nos dois casos, o corpo de massa maior, tendo sempre aceleração instantânea de menor módulo, leva mais tempo para descrever uma oscilação completa, isto é, tem período maior.

Por outro lado, se a mola é substituída por outra, de constante elástica maior, mas com a mesma elongação e sem que o corpo seja modificado, o módulo da força que ela exerce sobre o corpo fica maior. Então, qualquer que seja a elongação da mola, pela segunda lei de Newton, o módulo da aceleração instantânea do corpo também fica maior. Como a amplitude do movimento é a mesma nos dois casos, o corpo ligado à mola de constante elástica maior, tendo sempre aceleração instantânea de maior módulo, leva menos tempo para descrever uma oscilação completa e, portanto, tem período menor.

A segunda expressão permite calcular a frequência própria (também chamada frequência natural) de oscilação do corpo preso à mola. Dada a massa m do corpo e k , a constante elástica da mola, se o corpo não está sendo forçado por qualquer outro agente externo além da mola, ele só pode oscilar com esta frequência.

Elasticidade

Um objeto sobre o qual atuam forças externas pode ter variações de tamanho e/ou de forma. Estas variações estão relacionadas, em última análise, às interações mútuas entre os átomos que constituem o corpo e, é claro, às forças externas.

O comprimento de uma mola aumenta quando suspendemos um corpo à sua extremidade livre. Esse aumento de comprimento é causado pela força que o corpo exerce na mola. Esta força tem módulo igual ao módulo do peso do corpo. Quando o corpo é retirado, a mola recupera o seu comprimento original, desde que não tenha sido deformada permanentemente por excesso de carga. Uma bola de futebol tem uma mudança de forma ao ser chutada, readquirindo sua forma original após o chute, desde que não tenha sido danificada pela violência do impacto com a chuteira. Uma régua presa por uma de suas extremidades à borda de uma mesa e encurvada, volta à sua forma original quando cessa a força que a encurva, desde que não tenha sido muito grande sua intensidade.

A mola, a bola e a régua são exemplos de corpos elásticos. Elasticidade é a propriedade de um corpo pela qual ele readquire sua forma original quando desaparecem as causas de sua mudança de forma.

Exercício 1

De acordo com a lei de Hooke, uma mola, à qual um agente externo dá uma elongação que aumenta ou diminui o seu comprimento de equilíbrio, tende a voltar ao seu comprimento original exercendo, sobre o agente externo, uma força de intensidade proporcional à elongação:

$$F = -kx$$

em que k é a constante elástica e x , a alongação da mola, isto é, o quanto ela foi esticada ou comprimida além do seu comprimento de equilíbrio. O sinal negativo aparece porque a força que a mola exerce sobre o agente externo tem o mesmo sentido daquele escolhido como positivo para o eixo X quando a alongação é negativa e tem sentido contrário quando a alongação é positiva.

Verifique se a lei de Hooke vale para uma dada mola. Faça isso suspendendo corpos de massas diferentes e anotando as alongações correspondentes. Tome o cuidado de não deformar a mola. Para organizar seus dados, coloque-os na tabela abaixo.

Massa (kg)	Módulo do Peso (N)	Elongação (m)

Identifique a força que alonga a mola. Dica: não é a força peso do corpo suspenso.

Considerando uma mola de massa não desprezível suspensa na vertical, discuta por que ela se alonga mais na porção superior do que na porção inferior.

Calcule o módulo do peso de cada corpo suspenso usando $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Discuta a forma esperada para o gráfico do módulo da força pela alongação.

Em uma folha de papel milimetrado, faça o gráfico do módulo da força pela alongação e determine a constante de elasticidade da mola pela declividade da reta.

Observação

Com a expressão dada para o período de oscilação de um corpo preso a uma mola na horizontal, podemos determinar a constante elástica dessa mola. Para que não exista atrito no sistema podemos usar um colchão de ar entre o corpo e o plano horizontal.

Podemos determinar a massa do corpo com uma balança e medir o intervalo de tempo levado pelo corpo para completar, por exemplo, 10 oscilações, calculando o período do movimento dividindo esse intervalo de tempo por 10. Este procedimento diminui a influência do tempo de reação do observador sobre o resultado do experimento. Quanto maior o número de oscilações tomado, menor será tal influência.

Conhecendo o período do movimento e a massa da mola, determinamos a constante elástica da mola pela expressão:

$$k = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

Devemos observar que, no caso do pêndulo simples, a expressão obtida para o período de oscilação é aproximada, sendo tanto mais exata quanto menor for a amplitude do movimento. Contudo, para o sistema corpo-mola, a expressão do período é exata para qualquer amplitude, desde que a força que a mola exerce sobre o corpo em questão seja dada pela lei de Hooke. Desse modo, quando colocamos um sistema corpo-mola em oscilação, devemos ter o cuidado de tomar uma amplitude pequena não para aumentar a exatidão da expressão do período, mas para garantir que a mola não fique deformada permanentemente e que a lei de Hooke continue válida para ela.

Exercício 2

Uma mola, suspensa verticalmente por uma de suas extremidades em um suporte, tem um comprimento de 10 cm quando a outra extremidade está livre. Entretanto, quando um corpo de 0,1 kg é preso nesta extremidade e permanece em repouso num referencial fixo no suporte, o comprimento da mola passa a ser de 12 cm (Fig.19).

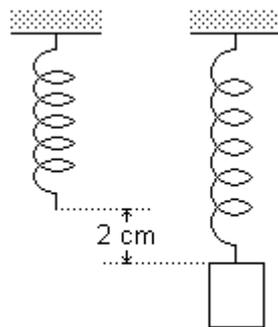


Fig.19

Realizando trabalho sobre o corpo, alongando a mola para que ela fique com 14 cm de comprimento e, depois, abandonando o corpo, ele oscila em MHS. (a) Calcule a constante elástica da mola. (b) Calcule o período e a frequência do MHS do corpo.

Exercício 3

Uma mola de constante elástica k está suspensa na vertical e na extremidade livre, atamos um corpo de massa m . Posto a oscilar, esse corpo executa um MHS vertical com frequência f . Então, a mola é cortada ao meio e o mesmo corpo é posto a oscilar na vertical, suspenso pela extremidade livre de uma das metades da mola. Calcule a nova frequência de oscilação.

Exercício 4

Um bloco preso a uma mola, apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito, tem um MHS ao redor do ponto 0 de equilíbrio (Fig.20).

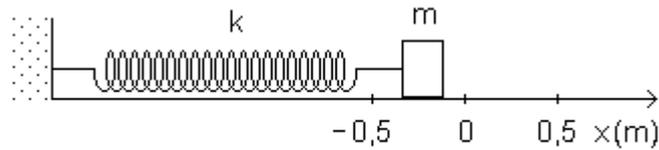


Fig.20

A mola tem constante elástica $k = 25 \text{ N/m}$, o bloco tem massa $m = 4 \text{ kg}$ e o MHS tem uma amplitude de $0,5 \text{ m}$. (a) Sabendo que, em $t = 0$, o corpo estava na posição $x = 0,5 \text{ m}$, determine a equação horária da posição do bloco num referencial fixo na superfície horizontal. (b) Faça o gráfico posição x tempo para esse bloco.

VIII. Energia no MHS

Para estudar a energia mecânica do oscilador harmônico vamos tomar, como exemplo, o sistema corpo-mola. A energia cinética do sistema está no corpo de massa m . A mola não tem energia cinética porque é uma mola ideal que, além de obedecer a lei de Hooke, tem massa desprezível.

Por outro lado, tomando o nível de referência para a energia potencial gravitacional na altura do centro de gravidade do corpo de massa m , a energia potencial gravitacional do sistema é nula. Contudo, existe uma energia potencial elástica, associada e localizada na mola. Levando em conta que esta energia potencial elástica é dada por:

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2$$

e que, para um oscilador harmônico:

$$x(t) = A \cos \omega t$$

segue-se que:

$$E_p = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega t$$

A energia cinética de um corpo de massa m , que se desloca com velocidade de módulo v num dado referencial, é:

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2$$

e como, para um oscilador harmônico:

$$v(t) = -A\omega \sin \omega t$$

temos:

$$E_C = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\text{sen}^2\omega t$$

Entretanto, para o sistema corpo-mola, em particular, vale a relação $k = m\omega^2$.
Por isso:

$$E_C = \frac{1}{2}kA^2\text{sen}^2\omega t$$

Da Trigonometria, sabemos que:

$$\text{sen}^2\omega t + \text{cos}^2\omega t = 1$$

e, portanto, a soma da energia cinética com a energia potencial elástica, isto é, a energia mecânica total do sistema corpo-mola, fica:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Esta expressão mostra que a energia mecânica total do sistema corpo-mola depende da constante de elasticidade da mola e do quadrado da amplitude do movimento do corpo.

A energia cinética do corpo preso à mola e a energia potencial elástica da mola variam com o tempo. Contudo, a energia mecânica total do sistema corpo-mola não depende do tempo, ou seja, é constante.

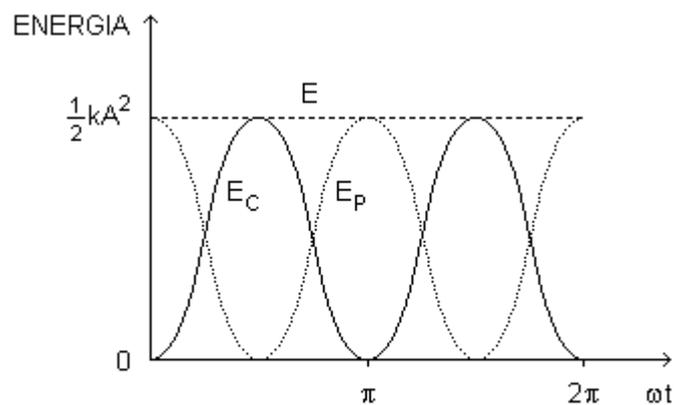


Fig.21

A Fig.21 mostra os gráficos da energia cinética (linha contínua), da energia potencial elástica (linha pontilhada) e da energia total (linha tracejada) em função de ωt . Uma vez que:

$$2\pi = \omega T$$

esta figura apresenta os referidos gráficos para o intervalo de tempo correspondente ao período do movimento. A partir daí, as formas dos gráficos se repetem periodicamente.

A Fig.22 mostra algumas configurações do sistema corpo-mola. As linhas verticais pontilhadas são para referência. A linha indicada por $-A$ está associada ao estado em que a mola está comprimida e o corpo, parado no referencial considerado. A linha indicada por 0 está associada ao estado em que a mola está com seu comprimento de equilíbrio e o corpo, com velocidade de módulo máximo. A linha indicada por $+A$ está associada ao estado em que a mola está distendida e o corpo, parado. As flechas indicam o módulo e o sentido da velocidade instantânea do corpo nas configurações correspondentes.

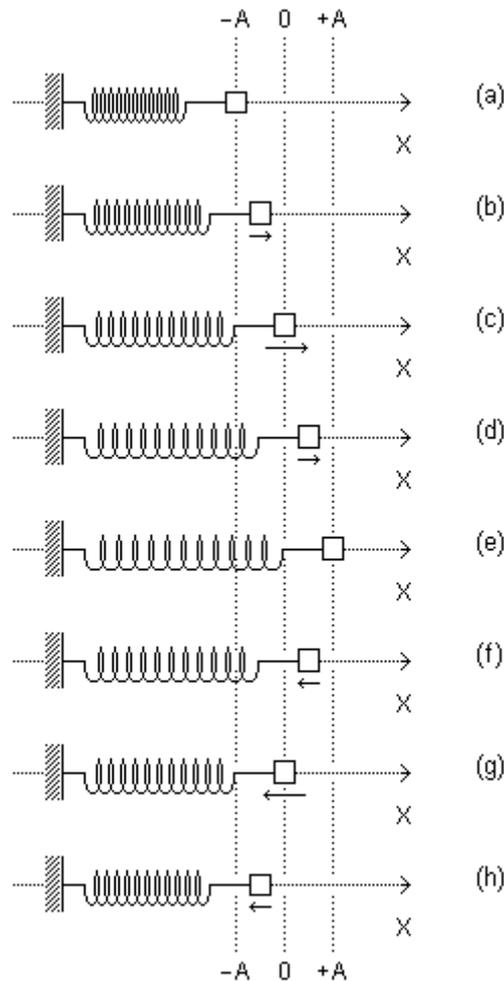


Fig.22

Em $t = 0$ (Fig.22(a)), o sistema se encontra na configuração correspondente a mola comprimida com uma elongação $x = -A$ e o corpo parado. Nesta configuração:

$$E = E_P = \frac{1}{2} kA^2$$

e

$$E_C = 0$$

Então (Fig.22(b)), o corpo adquire uma aceleração positiva causada pela força que a mola exerce sobre ele, a energia potencial da mola diminui enquanto que a energia cinética do corpo aumenta.

Em $t = \pi/2\omega$ (Fig.22(c)), o sistema alcança a configuração em que a mola tem alongação nula e a velocidade do corpo tem módulo máximo. Nesta configuração:

$$E_p = 0$$

e

$$E = E_c = \frac{1}{2}kA^2$$

Então (Fig.22(d)), o corpo adquire uma aceleração negativa causada pela força que a mola exerce sobre ele, sua energia cinética diminui enquanto que a energia potencial da mola aumenta.

Em $t = \pi/\omega$ (Fig.22(e)), o sistema alcança a configuração em que a alongação da mola vale $x = A$ e o corpo está parado. Nesta configuração:

$$E = E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

e

$$E_c = 0$$

De $t = \pi/\omega$ até $t = 2\pi/\omega = T$ (Fig.22(f), (g), (h) e (a)), o movimento se repete com o corpo se deslocando em sentido contrário.

Em $t = 2\pi/\omega = T$, o sistema alcança a mesma configuração que em $t = 0$. Daí por diante, o movimento se repete periódica e indefinidamente.

Se existe atrito entre o corpo e a superfície horizontal em que ele se apóia, uma parte da energia mecânica total do sistema corpo-mola se transforma em energia interna no corpo e na superfície horizontal a cada oscilação. A temperatura do corpo e a temperatura da superfície aumentam. Desta forma, o movimento do corpo é amortecido. Para que o movimento do corpo não seja amortecido, isto é, para que a energia mecânica do sistema corpo-mola seja constante, deve existir uma fonte externa que forneça energia mecânica para o sistema a uma taxa igual à taxa com que sua energia mecânica se transforma em energia interna.

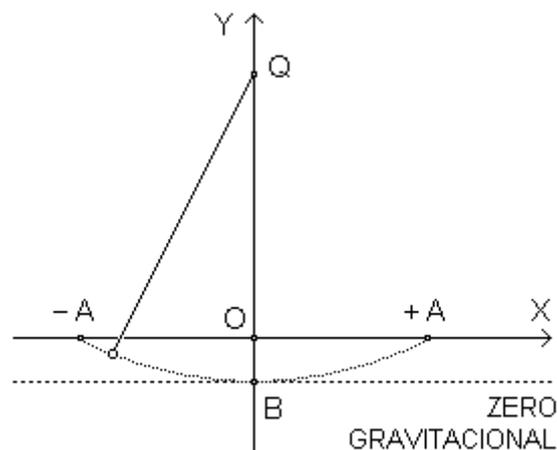


Fig.23

Para o pêndulo simples, a discussão é completamente análoga. Se escolhermos o nível de referência para a energia potencial gravitacional (zero gravitacional) na altura em que se encontra a partícula que faz parte do pêndulo simples quando este se encontra na vertical (Fig.23), a discussão se torna idêntica.

Assim, por exemplo, na configuração em que a partícula tem elongação máxima negativa, isto é, quando $x = -A$, a sua energia cinética é nula enquanto que a energia potencial gravitacional do sistema partícula-Terra é máxima e igual à energia mecânica total.

Na configuração em que a partícula tem elongação nula, isto é, quando $x = 0$, a energia cinética da partícula é máxima e igual à energia mecânica total e a energia potencial gravitacional do sistema partícula-Terra é nula.

Na configuração em que a partícula tem elongação máxima positiva, isto é, quando $x = A$, a sua energia cinética é nula enquanto que a energia potencial gravitacional do sistema partícula-Terra é máxima e igual à energia mecânica total.

Nas configurações intermediárias, a partícula tem aceleração positiva ou negativa, conforme o caso, tendo então energia cinética não nula e diferente da energia mecânica total, de modo que o sistema partícula-Terra tem certa energia potencial gravitacional também não nula.

No sistema corpo-mola, a energia cinética, quando existe, está localizada no corpo e a energia potencial elástica, quando existe, está localizada na mola. No pêndulo simples, a energia cinética, quando existe, está localizada na partícula que faz parte do pêndulo, mas não podemos dizer que a energia potencial está associada a esse ou àquele corpo. Ela deve estar associada ao sistema partícula-Terra como um todo, distribuída entre as partes que o constituem, já que depende da massa da partícula, da massa da Terra e da distância relativa entre elas.

Exercício 1

Um corpo de massa $m = 2 \text{ kg}$ oscila sobre uma mesa horizontal, sem atrito, preso a uma mola horizontal de constante elástica $k = 200 \text{ N/m}$. A amplitude das oscilações é de 10 cm . A partir desses dados, calcule (a) a energia cinética máxima do corpo e (b) a energia potencial elástica máxima da mola.

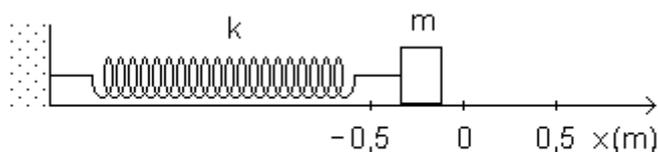


Fig.24

Exercício 2

Um bloco preso a uma mola e apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito tem um MHS com amplitude de $0,5 \text{ m}$ ao redor do ponto 0 de equilíbrio (Fig.24). Considere que, na situação mostrada, o comprimento da mola está diminuindo. (a) Desenhe flechas para indicar a velocidade e a aceleração do corpo e a força que a mola exerce sobre ele. (b) Indique as posições do corpo em que são máximas as energias cinética e potencial. (c) Identifique a que elemento ou elementos do sistema corpo-mola podemos atribuir a energia cinética e a energia potencial.

Exercício 3

Discuta como as seguintes propriedades de um oscilador harmônico simples são afetadas pela duplicação da amplitude: (a) período, (b) energia mecânica total, (c) módulo máximo da velocidade e (d) módulo máximo da aceleração.

IX. Ressonância

Vamos considerar os pêndulos A, B, C e D (Fig.25), constituídos por partículas de mesma massa, os três primeiros de comprimentos diferentes e o quarto, com comprimento igual ao primeiro, todos suspensos em um fio elástico esticado.

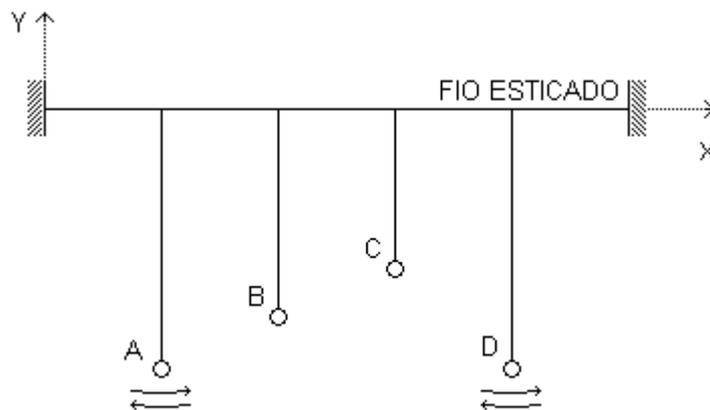


Fig.25

Fazendo oscilar o pêndulo A com certa amplitude A^* no referencial fixo nos suportes, observamos que os outros pêndulos, que estavam parados, começam a oscilar também. Os pêndulos B e C, nem bem começam a oscilar, param novamente. O pêndulo D, ao contrário, com o passar do tempo, oscila com uma amplitude cada vez maior enquanto que o pêndulo A oscila com uma amplitude cada vez menor. Quando a amplitude do pêndulo D chega a um valor máximo próximo de A^* , o pêndulo A está praticamente imóvel. Então, os movimentos se repetem, com os pêndulos A e D trocando seus papéis e assim, sucessivamente, até que a energia mecânica associada ao movimento inicial tenha se transformado em outro tipo de energia. O fio esticado atua como intermediário na troca de energia entre os pêndulos.

No experimento descrito acima, o pêndulo A, oscilando com sua frequência própria, faz com que o fio esticado oscile com a mesma frequência. Dizemos que o fio esticado entra em vibração forçada. Então, o fio esticado faz com que os pêndulos B, C e D oscilem na mesma frequência do pêndulo A já que esta é, agora, também a frequência do fio. Como o fio não pode oscilar com uma frequência diferente de qualquer uma de suas frequências próprias, ele termina por parar. O mesmo acontece com os pêndulos B e C. Os pêndulos A e D são idênticos e, por isso, têm frequências próprias iguais. O pêndulo D, portanto, é forçado a oscilar com uma frequência igual à sua frequência própria e pode absorver toda a energia disponível, aumentando sua amplitude de oscilação. Com o passar do tempo, os movimentos se repetem com os papéis dos pêndulos A e D trocados e, assim, sucessivamente.

Quando a frequência com que um agente externo perturba um corpo é igual a frequência própria (ou uma das frequências próprias) de vibração ou de oscilação desse corpo, ele passa a oscilar com amplitude cada vez maior. Este fenômeno é o

que se chama de ressonância. Se o agente externo perturba continuamente o corpo com o qual está em ressonância, a amplitude das vibrações ou oscilações pode ficar extraordinariamente grande a ponto de destruir o corpo, desde que os módulos das forças de resistência ou de dissipação sejam pequenos. Além disso, o fluxo de energia do agente externo para o corpo é máximo quando eles estão em ressonância. No exemplo acima, os pêndulos A e D estão em ressonância.

Um exemplo cotidiano de ressonância ocorre quando uma criança anda de balanço. Para movimentar a si mesma e ao balanço, num referencial fixo no solo, a criança encolhe as pernas quando ela e o balanço se movem para trás e estica as pernas quando ela e o balanço se movem para a frente. Se a frequência do movimento das pernas da criança é igual à frequência própria do pêndulo constituído por ela e o balanço, a amplitude das oscilações aumente cada vez mais.

Exercício

Discuta um fenômeno em que ocorre algum tipo de ressonância.

X. Mais Ressonância

Em todo sistema real em que se desenvolvem oscilações por efeito de uma perturbação externa inicial, aparece um ou outro processo de atrito que amortece essas oscilações. Se as perdas de energia mecânica pelo atrito são compensadas por uma fonte externa, as oscilações do sistema podem ser mantidas.

Quando uma força externa periódica atua sobre o sistema, desenvolve-se um movimento transiente que, ao desaparecer, deixa um movimento estacionário no qual o sistema vibra com a frequência da força externa.

A amplitude das vibrações depende, entre outros fatores, da frequência da força externa. Por exemplo, se um impulso periódico é dado numa criança num balanço, a amplitude do movimento será tanto maior quanto mais ajustada estiver a frequência do impulso com a frequência natural do sistema formado pela criança e pelo balanço.

Oscilações Naturais

Para uma discussão mais profunda do fenômeno de ressonância, vamos considerar um sistema corpo-mola, isto é, o sistema formado por um corpo de massa m apoiado sobre uma superfície horizontal sem atrito e preso a uma mola de massa desprezível e de constante elástica k (Fig.26).

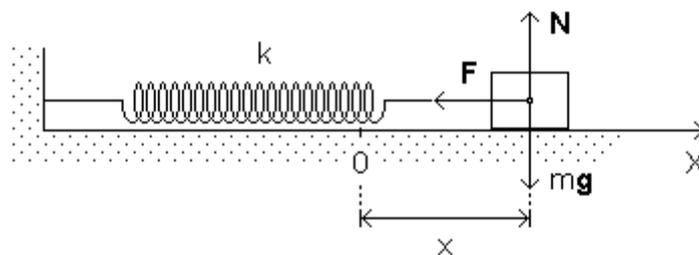


Fig.26

Se o corpo é abandonado com a mola esticada ou comprimida, ele passa a se mover, sob o efeito da força da mola, num movimento harmônico simples (MHS) num

referencial fixo na superfície horizontal. Sobre o corpo existem três forças: a força peso, a força normal e a força da mola. Como as forças peso e normal se cancelam mutuamente, a força resultante sobre o corpo é a própria força que a mola exerce sobre ele. Como já discutimos, a frequência angular e a frequência do MHS do corpo são, respectivamente:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

Se o corpo não é forçado por qualquer outro agente externo além da força da mola, ele só pode oscilar com a frequência f . Por isso, esta frequência é chamada frequência natural ou frequência própria de oscilação desse corpo preso a essa mola.

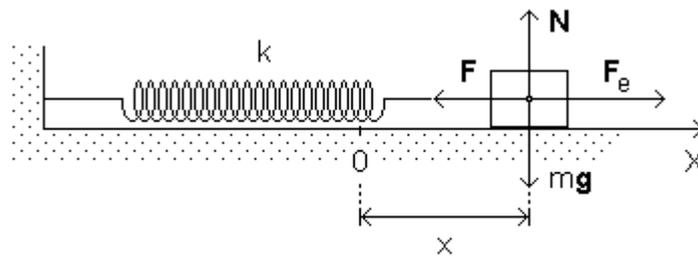


Fig.27

Oscilações Forçadas

Agora, vamos considerar que, sobre o corpo preso na mola, atua, além das forças já discutidas, uma força externa que varia periodicamente no tempo com uma frequência angular ω (Fig.27). O módulo dessa força é dado por:

$$F_e = F_0 \cos \omega t$$

Por efeito dessa força externa, o corpo desenvolve oscilações forçadas com frequência angular ω . A elongação do movimento oscilatório forçado, como função do tempo, pode ser escrita:

$$x(t) = A \cos(\omega t - \phi)$$

em que A representa a amplitude das oscilações forçadas e ϕ , a diferença de fase entre a força externa e as oscilações forçadas.

Os módulos da velocidade e da aceleração do corpo em função do tempo são, respectivamente:

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t - \phi)$$

e

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t - \phi)$$

Pela segunda lei de Newton podemos escrever, em módulo:

$$ma = -kx - bv + F_e$$

em que $-kx$ é o módulo da força exercida pela mola (força restauradora) e $-bv$ é o módulo da força de atrito. Aqui tomamos o módulo da força de atrito como sendo proporcional ao módulo da velocidade do corpo. Isto é verdade, de modo geral, para corpos que se movimentam em um fluido com velocidades de módulos pequenos.

Dividindo os termos da expressão acima pela massa do corpo, lembrando que $\omega_0^2 = k/m$ e escrevendo $\gamma = b/2m$, obtemos:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\gamma v + \frac{F_e}{m}$$

que, com as respectivas expressões dadas acima para a , v e F_e fica:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t - \phi) = -\omega_0^2 A \cos(\omega t - \phi) + 2\gamma A \omega \sin(\omega t - \phi) + (F_0/m) \cos \omega t$$

Agora, levando em conta a identidade trigonométrica:

$$\sin \alpha = \cos(\alpha - \frac{1}{2}\pi)$$

vem:

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A \cos(\omega t - \phi) = 2\gamma A \omega \cos[(\omega t - \phi) - \frac{1}{2}\pi] + (F_0/m) \cos \omega t$$

Estamos interessados numa expressão matemática que nos forneça a amplitude A das oscilações forçadas.

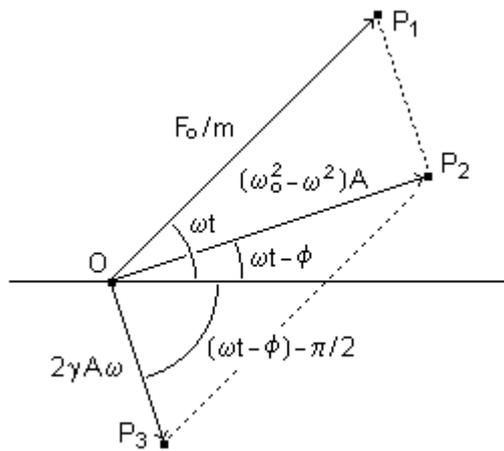


Fig.28

A Fig.28 sugere interpretar a expressão acima como a igualdade entre a projeção, sobre o eixo horizontal, de um vetor de módulo

$$(\omega_0^2 - \omega^2) A$$

e a soma das projeções, sobre o mesmo eixo, dos vetores de módulos:

$$F_0 / m$$

e

$$2\gamma A\omega$$

Sendo assim, observando que o triângulo OP_2P_3 é um triângulo retângulo com ângulo reto no ponto O, o teorema de Pitágoras permite escrever:

$$(2\gamma A\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2 = (F_0 / m)^2$$

e daí, a amplitude das oscilações forçadas fica:

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

A amplitude das oscilações forçadas é proporcional à amplitude F_0 da força externa periódica e depende consideravelmente da relação entre a freqüência angular ω dessa força externa e a freqüência angular ω_0 das oscilações próprias do sistema.

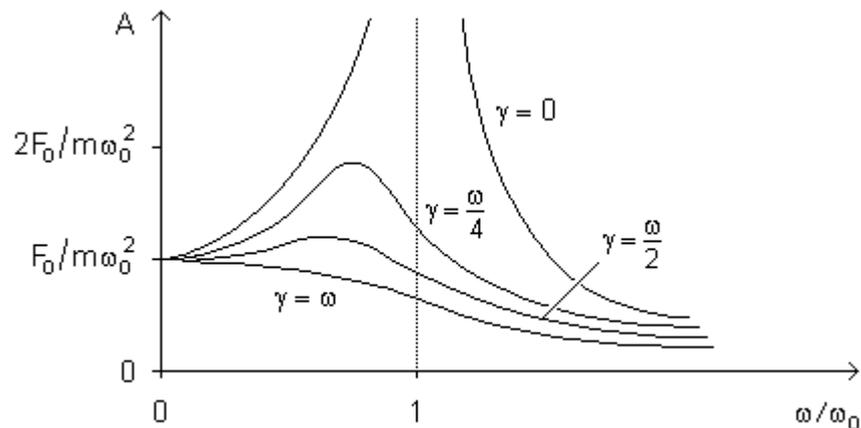


Fig.29

Dados γ e F_0 , o denominador da expressão acima é grande se ω é muito diferente de ω_0 . Nesse caso, a amplitude do movimento forçado é pequena (Fig.29). Quando ω se aproxima de ω_0 , o denominador se torna menor e a amplitude, maior. A freqüência angular ω para a qual a amplitude é máxima se chama freqüência angular de ressonância e dizemos que o agente da força externa está em ressonância com o sistema.

Por outro lado, quanto menor o atrito, isto é, quanto menor a constante de amortecimento γ , tanto mais próximos estão os valores de ω e ω_0 para que a amplitude das oscilações alcance o valor máximo.

Além disso, dada a freqüência angular ω , a amplitude das oscilações forçadas será tanto maior também quanto menor o atrito. Por isso, na ressonância, não se pode desprezar o atrito do sistema, mesmo que ele seja pequeno. Caso contrário, a amplitude máxima tende ao infinito e, na verdade, antes disso, o sistema já estaria destruído.

ONDAS MECÂNICAS

I. Introdução

Consideremos um certo sistema físico e uma de suas propriedades, como uma mola e sua elongação, uma corda e o deslocamento transversal de cada um de seus pontos, uma certa quantidade de ar e sua pressão, um campo eletromagnético numa certa extensão do espaço e as intensidades das componentes elétrica e magnética e assim por diante. Conforme a natureza do sistema, uma mudança na propriedade em questão em uma de suas partes pode se propagar para outras partes, como um pulso ou uma onda associada a esta propriedade.

Os aspectos mais importantes das ondas são sua velocidade de propagação, sua frequência e suas modificações quando variam as propriedades físicas do meio pelo qual se propagam, como nos fenômenos de reflexão, refração e polarização, quando encontram obstáculos, como nos fenômenos de difração e espalhamento, ou quando mais de uma onda se propaga na mesma região do espaço, como no fenômeno de interferência.

Estudaremos as ondas mecânicas em meios elásticos, embora os fenômenos mencionados acima sejam comuns a todos os tipos de onda.

A propagação de ondas mecânicas progressivas em um meio elástico está relacionada à transmissão de energia de um ponto a outro desse meio. Por exemplo, quando uma gota de água cai sobre a superfície plana de um lago, produz um pulso, isto é, uma perturbação que se propaga, afastando-se cada vez mais do ponto de impacto, num padrão circular de raio crescente. As regiões da superfície do lago por onde já passou a perturbação se acalmam. Se a superfície do lago é atingida por um sem número de gotas que caem em seqüência, elas geram uma onda que se afasta cada vez mais do ponto de impacto.

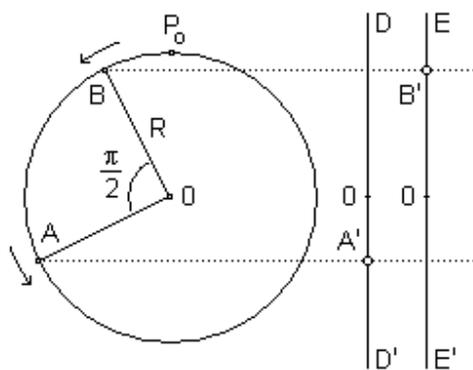


Fig.1

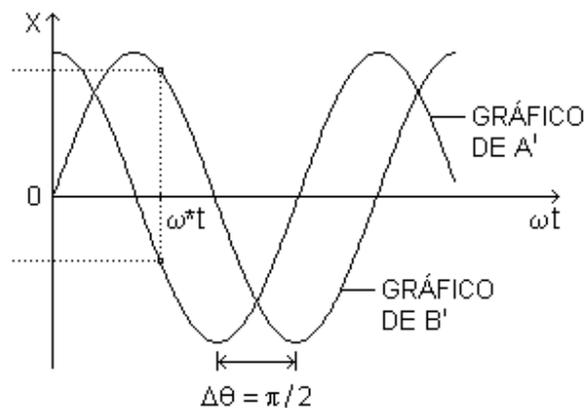


Fig.2

II. Diferença de Fase

Para discutir o conceito de diferença de fase, consideremos duas partículas, A e B, com movimentos circulares uniformes idênticos num dado referencial. Em $t = 0$, a partícula A ocupava a posição P_0 (Fig.1). As partículas estão separadas por uma distância $2\pi R/4$, medida sobre a trajetória comum de raio R. Esta distância

corresponde a um ângulo de $\pi/2$ entre os segmentos de reta que unem as partículas ao centro da trajetória ou a um intervalo de tempo $\pi/2\omega$. Então, dizemos que entre os dois movimentos circulares uniformes das partículas A e B existe uma diferença de fase $\Delta\theta = \pi/2$ radianos.

Por outro lado, o movimento harmônico simples pode ser visto como a projeção ortogonal do movimento circular uniforme sobre qualquer diâmetro (ou qualquer reta paralela a qualquer diâmetro) da circunferência que constitui a trajetória da partícula no referencial considerado. Assim, os movimentos circulares uniformes das partículas A e B, projetados ortogonalmente sobre as retas verticais DD' e EE', respectivamente, constituem os movimentos harmônicos simples das partículas A' e B'. Observando os respectivos gráficos das elongações em função de ωt (Fig.2), vemos que a diferença de fase entre os movimentos circulares uniformes e, agora, entre os movimentos harmônicos simples, aparece como um deslocamento de um gráfico em relação ao outro ao longo do eixo ωt , deslocamento este dado por $\Delta\theta = \pi/2$ radianos.

A equação horária de movimento para uma partícula em MHS é:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

Nesta expressão, o argumento $(\omega t + \delta)$ é chamado de fase e δ , de fase inicial, porque dá a posição da partícula em $t = 0$. Na situação particular que estamos discutindo, $\delta = 0$ para a partícula A' e $\delta = -\pi/2$ para a partícula B'. Desse modo, as respectivas equações horárias ficam:

$$x_A(t) = R \cos \omega t$$

e

$$x_B(t) = R \cos(\omega t - \pi/2)$$

Discutimos o conceito de diferença de fase considerando o exemplo de dois movimentos harmônicos com uma diferença de fase de $\pi/2$ radianos. De modo geral, os movimentos harmônicos podem ter qualquer diferença de fase.

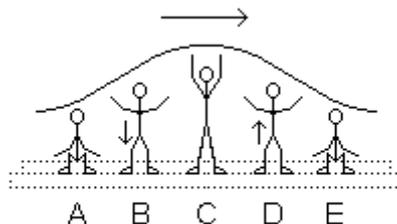


Fig.3

III. Ondas Mecânicas Progressivas Unidimensionais

Um fenômeno interessante de observar nos estádios de futebol é a chamada ola. Os espectadores de uma linha se colocam de pé e sentam, sem sair do lugar, quando percebem que os espectadores da linha adjacente o fizeram. Entre o movimento de uma linha e o movimento da linha adjacente existe uma diferença de fase. O efeito coletivo é um pulso que se propaga pelos espectadores do estádio. Quando o pulso se propaga para a direita, por exemplo, os espectadores de uma linha

fazem o movimento um pouco depois que os espectadores da linha adjacente à esquerda (Fig.3). Os espectadores de cada linha apenas se põem de pé e sentam, não se deslocando lateralmente: eles não vão junto com o pulso. Eles são, por assim dizer, o meio através do qual o pulso se propaga. Se os espectadores se colocam de pé e sentam continuamente, uma onda progressiva (ou viajante) se propaga pelos espectadores do estádio.

Onda mecânica progressiva é um distúrbio periódico que se propaga através de um meio elástico. Não existe transporte de matéria e sim, de energia, pela onda. Se cada partícula do meio elástico executa um MHS, dizemos que a onda é harmônica.

Ondas Transversais

Se as partículas do meio pelo qual passa uma onda progressiva oscilam numa direção perpendicular à direção de propagação da onda, ela é chamada de onda transversal. A Fig.4 representa as posições de onze partículas de um meio elástico em três instantes de tempo sucessivos:

- t
- t + Δt
- e
- t + 2Δt

Devemos observar que o movimento de uma partícula qualquer tem sempre uma diferença de fase negativa em relação ao movimento da partícula adjacente à sua direita e é justamente por isso que o movimento coletivo é uma onda progressiva transversal que se propaga para a direita no referencial considerado. Se a diferença de fase fosse positiva, a onda se propagaria na direção oposta.

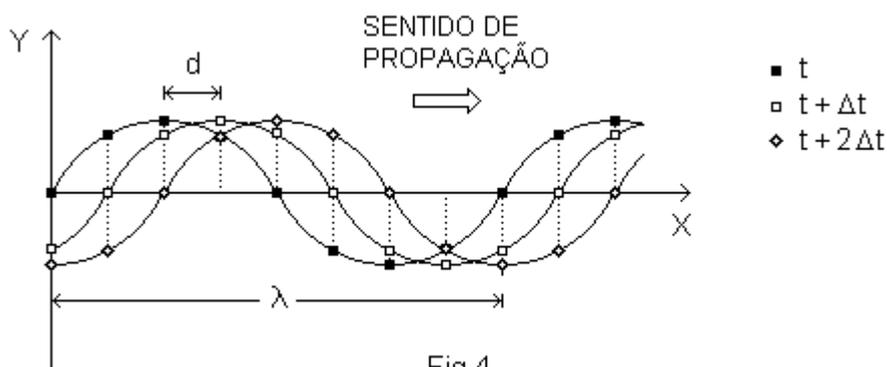


Fig.4

A onda gerada numa corda horizontal pelo movimento contínuo, para cima e para baixo, da mão que segura uma de suas extremidades, é um exemplo de onda transversal. Outro exemplo de onda transversal, só que não mecânica, é a onda eletromagnética, em que o campo elétrico e o campo magnético oscilam perpendicularmente um ao outro e à direção de propagação da onda.

Polarização de uma Onda Transversal

A direção do movimento das partículas do meio quando, por ele, passa uma onda transversal, é perpendicular à direção de propagação da onda. Mas existem

infinitas direções que são perpendiculares à direção de propagação da onda. Caso as partículas do meio se movimentem sempre na mesma direção, ou seja, caso a onda permaneça sempre no mesmo plano, dizemos que ela é linearmente polarizada.

Qualquer onda transversal pode ser considerada como combinação de duas ondas linearmente polarizadas em direções perpendiculares. Se todos os deslocamentos das partículas do meio têm o mesmo módulo, mas direções diferentes, de modo que a onda tenha forma helicoidal, dizemos que a onda é circularmente polarizada. Nesse caso, cada partícula do meio descreve uma circunferência em torno da reta que passa pelos pontos de equilíbrio das partículas do meio.

Ondas Longitudinais

Se as partículas do meio pelo qual passa uma onda progressiva oscilam numa direção paralela à direção de propagação da onda, no referencial considerado, esta é chamada de onda longitudinal. A Fig.5 representa, em linhas horizontais, as posições de treze partículas de um meio elástico, em onze instantes de tempo sucessivos:

$$\begin{aligned}
 t_0 &= t \\
 t_1 &= t + \Delta t \\
 t_2 &= t + 2\Delta t \\
 &\dots \\
 t_{10} &= t + 10\Delta t
 \end{aligned}$$

Os pontos de equilíbrio dos movimentos harmônicos das partículas do meio estão sobre as linhas verticais. As linhas curvas indicam esses movimentos.

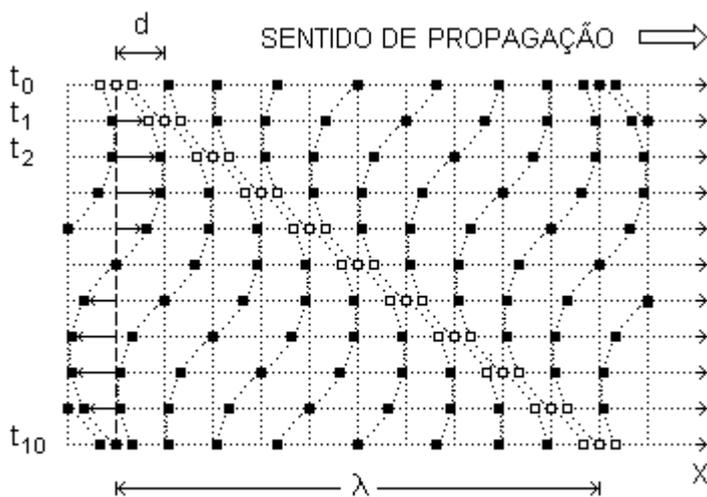


Fig.5

Devemos observar, em particular, a segunda partícula do meio, que oscila ao redor do ponto de equilíbrio sobre a linha tracejada e cujas elongações estão representadas pelas flechas. Também devemos observar que as distâncias relativas entre a primeira, a segunda e a terceira partículas no instante t são as mesmas que entre a segunda, a terceira e a quarta partículas em $t + \Delta t$ e assim por diante, mostrando que a onda se propaga para a direita. O movimento de qualquer partícula tem sempre uma diferença de fase negativa em relação ao movimento da partícula

adjacente à sua direita e é justamente isso que torna o movimento coletivo uma onda progressiva longitudinal que se propaga para a direita.

A onda gerada numa mola, quando golpeamos ritmicamente uma de suas extremidades ao longo da direção do seu eixo (Fig.6(a)), é uma onda progressiva longitudinal. A onda sonora gerada num corpo sólido, quando golpeamos ritmicamente uma parte qualquer dele, também é uma onda progressiva longitudinal. Uma onda sonora no ar, gerada pelo movimento de vai e vem da membrana de um alto-falante (Fig.6(b)), também é uma onda progressiva longitudinal.

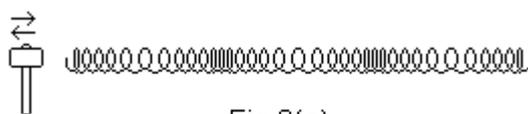


Fig.6(a)



(b)

Exercício

Um brinquedo tradicional é o telefone em que as extremidades de um fio são fixadas aos fundos de duas latas vazias. Quando o fio é esticado, as ondas sonoras produzidas numa das latas se propagam até a outra. Discuta esse fenômeno.

IV. Elementos de uma Onda

O padrão espacial que caracteriza a forma da onda se desloca à medida que o tempo passa (Fig.4 e Fig.5), no referencial considerado, com velocidade de módulo:

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

Cada partícula do meio elástico pelo qual passa uma onda harmônica executa um MHS. O período de oscilação de qualquer partícula do meio, ou seja, o intervalo de tempo levado para realizar exatamente uma oscilação, é igual ao período da onda.

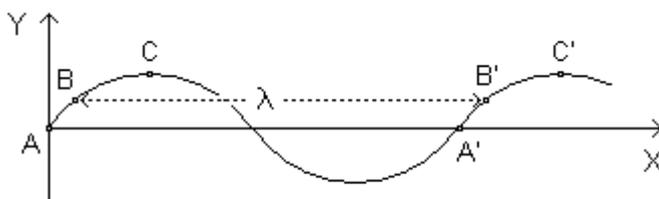


Fig.7

A menor distância entre duas partículas do meio, medida ao longo da direção de propagação da onda, cujos movimentos harmônicos simples estão em fase, é chamada de comprimento de onda (Fig.7). As partículas A e A' têm movimentos em

fase. O mesmo acontece com as partículas B e B' e C e C'. O comprimento de onda é a distância percorrida pela onda durante um dos seus períodos.

Representando por T o período e por λ o comprimento de onda, o módulo da velocidade de propagação da onda pode ser escrito:

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

De modo análogo, a frequência do MHS associado a cada partícula do meio elástico pelo qual se propaga a onda é, também, a frequência da onda, ou seja, o número de comprimentos de onda contidos dentro da distância percorrida pela onda na unidade de tempo. Assim, representando por f a frequência da onda, temos:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$$

Além disso, definimos o número de onda, representado por k, pela expressão:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Usando as duas expressões acima, o módulo da velocidade de propagação da onda pode ser escrito:

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

O módulo da velocidade de propagação de uma onda transversal numa corda é dado pela expressão:

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$$

em que τ representa o módulo das forças de tensão aplicadas à corda e μ , a densidade linear, isto é, o cociente da massa da corda pelo seu comprimento.

De modo geral, o módulo da velocidade de propagação de uma onda em um dado meio é constante e só depende das propriedades físicas desse meio. Portanto, ondas mecânicas com diferentes frequências ou comprimentos de onda se propagam, no mesmo meio, com velocidades de módulos iguais. Além disso, como $v = \lambda f$, uma onda com uma dada frequência só pode ter um único comprimento de onda. Se a frequência é grande, o comprimento de onda é pequeno e vice-versa. Por isso, podemos caracterizar as ondas mecânicas em um meio tanto pela frequência quanto pelo comprimento de onda.

Por outro lado, a frequência de uma onda é característica da fonte emissora. Desse modo, quando uma onda passa de um meio para outro, a frequência permanece a mesma. Contudo, o módulo da velocidade de propagação muda porque é função das propriedades físicas do meio e como $f = v/\lambda$, o comprimento de onda também muda. Por isso, podemos caracterizar uma onda que passa de um meio para outro apenas pela sua frequência.

Exercício 1

A cada meio segundo, um conta-gotas deixa cair uma gota sobre a superfície livre de um líquido em uma grande cuba, produzindo uma onda com comprimento de onda $\lambda = 10$ cm. (a) Calcule o módulo da velocidade de propagação da onda no referencial fixo na cuba. (b) Calcule o número de cristas que passam, por segundo, através de um plano vertical e identifique a grandeza física associada.

Exercício 2

A Fig.8 mostra duas cordas idênticas, com ondas que se propagam com velocidades de mesmo módulo num referencial fixo no solo.

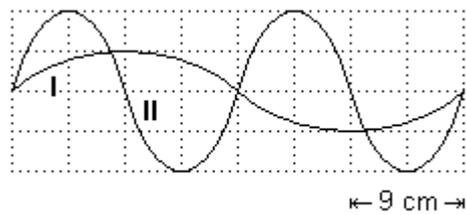


Fig.8

Identifique a corda com a onda que tem maior (a) comprimento de onda, (b) frequência e (c) amplitude.

Exercício 3

Considere que a frequência da onda na corda II do exercício anterior é de 30 Hz. Calcule (a) o módulo da velocidade de propagação das ondas nas duas cordas e (b) a frequência da onda na corda I.

Exercício 4

A Fig.9 representa uma corda pela qual passa uma onda que se desloca para a direita num dado referencial.

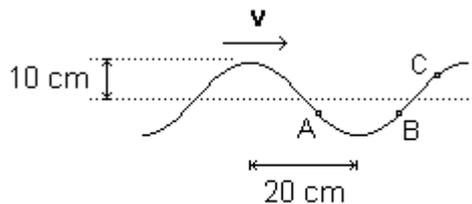


Fig.9

Desenhe flechas para representar as velocidades instantâneas dos pontos A, B e C da corda.

Exercício 5

A Fig.10 representa dois instantâneos, em $t = 2$ s (linha contínua) e $t = 2,2$ s (linha pontilhada), de parte de uma corda na qual se propaga uma onda.

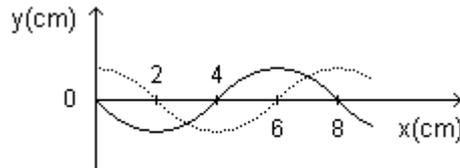


Fig.10

Determine a frequência dessa onda.

V. Transferência de Energia pela Onda

O transporte de energia por uma onda mecânica progressiva num meio elástico está associado à transferência de energia entre elementos de volume desse meio. Vamos discutir isso tomando, como exemplo, uma corda pela qual se propaga uma onda transversal (Fig.11).

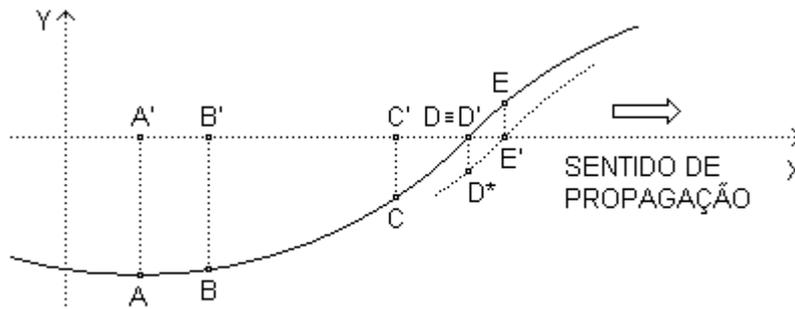


Fig.11

A linha horizontal pontilhada, sobre a qual está colocado o eixo X do referencial, representa a corda quando, por ela, não se propaga qualquer onda. Esta linha representa também as posições de equilíbrio dos movimentos harmônicos simples executados, ao longo do eixo Y, pelos elementos de volume, isto é, segmentos da corda com comprimentos muito pequenos. As letras A, B, C, D e E indicam as posições de alguns elementos de volume e as letras A', B', C', D' e E' indicam os pontos de equilíbrio dos respectivos movimentos harmônicos simples.

O elemento de volume na posição A está momentaneamente em repouso no referencial considerado. Por isso, sua energia cinética é zero. Na vizinhança de A, a corda não está deformada, de modo que a energia potencial do elemento de volume em A é zero. A energia total desse elemento de volume também é zero.

O elemento de volume em D tem velocidade ao longo do eixo Y com sentido oposto ao desse eixo e módulo máximo, já que está passando pela posição de equilíbrio do seu MHS. Por isso, a sua energia cinética tem o valor máximo. Observando que a distância entre C e D é maior do que a distância entre C' e D',

podemos inferir que, na vizinhança de D, a corda alcança sua máxima deformação, de modo que a energia potencial do elemento de volume em D tem o valor máximo. A energia total desse elemento de volume também é máxima.

Um elemento de volume entre A e D (como aquele em B, por exemplo) tem energia total entre zero e o valor máximo. Essa energia aumenta com o aumento da distância ao ponto A e com a diminuição da distância ao ponto D.

Por outro lado, como a onda se propaga no mesmo sentido que o eixo X, o elemento de volume em D se move ao longo do eixo Y com velocidade de sentido contrário ao desse eixo e, no instante seguinte, ele se encontra, digamos, em D*. Como ele não se encontra mais na posição de equilíbrio do seu MHS vertical, sua energia total não tem mais o valor máximo. Nesse mesmo instante e provindo de E, o elemento de volume à sua direita alcança E', a posição de equilíbrio do respectivo MHS ao longo do eixo Y. A energia total desse elemento de volume tem, agora, o valor máximo. Assim, certa quantidade de energia foi transferida do elemento de volume em D para o elemento de volume em E.

Esse processo de transferência de energia, que descrevemos entre um elemento de volume na sua posição de equilíbrio e o elemento de volume à sua direita, se repete continuamente, entre qualquer elemento de volume e o elemento de volume à sua direita.

As ondas transversais só podem se propagar em um meio se a mudança de forma desse meio vem acompanhada do aparecimento de forças restauradoras. Isto acontece em meios sólidos e na superfície dos líquidos. Ondas mecânicas transversais não se propagam em gases.

VI. Equação da Onda

Para estabelecer a equação da onda vamos tomar uma onda transversal que se propaga na direção do eixo X do referencial considerado e no mesmo sentido desse eixo, com velocidade de módulo v (Fig.12).

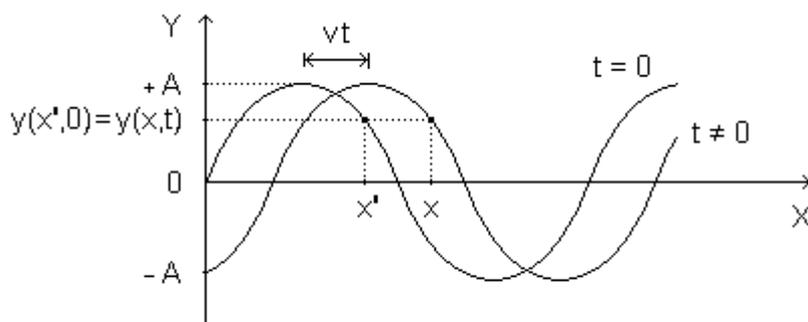


Fig.12

O padrão espacial da onda se desloca no espaço com o passar do tempo. Na Fig.12, representamos a onda no instante de tempo considerado como inicial ($t = 0$) e num instante posterior genérico ($t \neq 0$). Como estamos estudando ondas harmônicas, em qualquer instante de tempo, o padrão espacial da onda é dado por uma função harmônica (seno ou cosseno). Assim, para $t = 0$, escrevemos:

$$y(x,0) = A \text{ sen } bx$$

em que A representa a amplitude da onda e b , uma constante que devemos determinar. O padrão espacial da onda repete-se periodicamente ao longo do eixo X . O período espacial é, por definição, o comprimento de onda. Assim, temos:

$$y(x + \lambda, 0) = y(x, 0)$$

Usando a expressão acima:

$$\text{sen}[b(x + \lambda)] = \text{sen}bx$$

e, como, da Trigonometria, sabemos que:

$$\text{sen}(x + 2\pi) = \text{sen}x$$

podemos concluir, dessas duas últimas expressões, que $b\lambda = 2\pi$, ou seja, que b é o número de onda. Por isso, a expressão para o padrão espacial da onda em $t = 0$ pode ser escrita:

$$y(x, 0) = A \text{sen}kx$$

Por outro lado, tomando os pontos x' e x de modo que $x - x' = vt$, ou seja, de modo que $x - x'$ representa a distância percorrida pela onda durante o intervalo de tempo t , temos:

$$y(x, t) = y(x', 0)$$

ou:

$$y(x, t) = y(x - vt, 0)$$

e usando a expressão acima para $y(x, 0)$ com $v = \omega/k$ vem:

$$y(x, t) = A \text{sen}(kx - \omega t)$$

Esta equação representa uma situação particular porque, nela, está implícita a condição $y = 0$ para $x = 0$ e $t = 0$. A equação geral da onda que se propaga sobre o eixo X no mesmo sentido que aquele considerado positivo para esse eixo é:

$$y(x, t) = A \text{sen}(kx - \omega t + \delta)$$

A grandeza δ é chamada de fase inicial.

Repetindo a demonstração acima substituindo v por $-v$, obtemos a equação da onda que se propaga em sentido contrário àquele considerado positivo para o eixo X :

$$y(x, t) = A \text{sen}(kx + \omega t + \delta)$$

Para estabelecer estas equações tomamos, por questões didáticas, o caso de uma onda transversal. Contudo, as equações valem também para ondas longitudinais.

Exercício 1

A Fig.13 representa um instantâneo de uma corda em que se propaga uma onda transversal cuja velocidade tem módulo de 6 m/s num referencial fixo no solo. Determine a equação dessa onda.

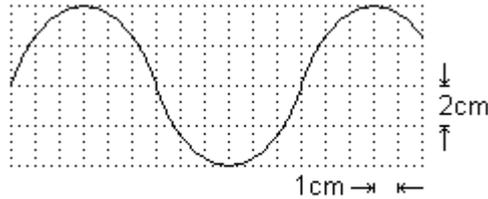


Fig.13

Exercício 2

Num dado referencial, a onda transversal progressiva que se desloca em certa corda é descrita pela expressão:

$$y(x, t) = 10 \text{ sen}[\pi(0,01x - 2t)]$$

com x e y dados em centímetros e t em segundos. Calcule (a) o módulo da velocidade, (b) a frequência e (c) o comprimento de onda dessa onda.

VII. Princípio de Superposição

Duas ou mais ondas podem se cruzar na mesma região do espaço, movendo-se independentemente. Então, pelo princípio de superposição: o deslocamento de qualquer partícula do meio em um dado instante é a soma vetorial dos deslocamentos que seriam produzidos pelas ondas individualmente.

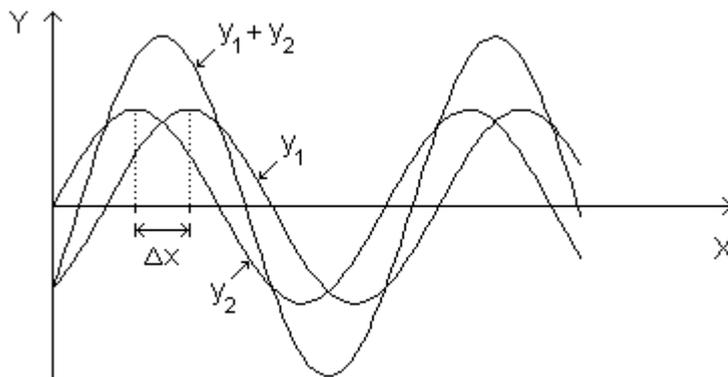


Fig.14

O princípio de superposição só vale para ondas em meios elásticos, onde as forças de restauração são proporcionais às deformações. Inversamente, qualquer

movimento ondulatório pode ser analisado como combinação de movimentos ondulatórios simples. Os efeitos físicos associados à superposição de duas ou mais ondas são chamados de interferência. Como exemplo, vamos considerar duas ondas transversais idênticas, isto é, com frequências e amplitudes iguais e que se propagam na mesma direção e no mesmo sentido, com velocidades de módulos iguais, mas uma atrasada em relação à outra, com diferença de fase constante. Assim, escrevemos:

$$y_1(x,t) = A \sin(kx - \omega t - \delta)$$

e

$$y_2(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$$

Em um instante de tempo qualquer (t fixo), y_1 e y_2 representam duas ondas separadas por uma distância $\Delta x = \delta / k$ sobre o eixo X (Fig.14). Numa dada posição (x fixo), y_1 e y_2 representam dois movimentos harmônicos simples defasados por um intervalo de tempo $\Delta t = \delta / \omega$.

A onda resultante da superposição de y_1 e y_2 é dada por:

$$y_1 + y_2 = A [\sin(kx - \omega t - \delta) + \sin(kx - \omega t)]$$

e pela expressão trigonométrica:

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

vem:

$$y_1 + y_2 = \left(2A \cos \frac{\delta}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t - \frac{\delta}{2}\right)$$

A onda resultante tem a mesma frequência angular ω que y_1 e y_2 , mas a amplitude, agora, é dada pelo fator $2A \cos(\delta/2)$.

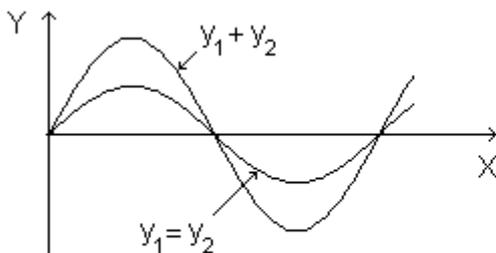
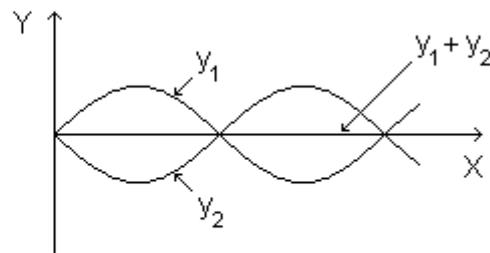


Fig.15(a)



(b)

Para $\delta = 0$ temos $y_1 = y_2$ e a amplitude da onda resultante é $2A$ (Fig.15(a)). Nesse caso, dizemos que existe interferência construtiva entre y_1 e y_2 (condição de máximo).

Para $\delta = \pi$ temos $y_1 = -y_2$ e a amplitude da onda resultante é zero (Fig.15(b)). Nesse caso, dizemos que existe interferência destrutiva entre y_1 e y_2 (condição de mínimo).

De modo geral, pode haver interferência entre ondas com quaisquer frequências e/ou amplitudes e com qualquer diferença de fase.

Exercício

Duas ondas circulares de mesmo comprimento de onda são geradas em pontos distintos da superfície de um lago. Discuta em que condições a interferência dessas ondas é construtiva e em que condições a interferência é destrutiva.

VIII. Velocidade de Fase e Velocidade de Grupo

A velocidade de propagação de uma onda harmônica de comprimento de onda λ , frequência f , frequência angular ω e número de onda k , cujo módulo é dado por:

$$v = \lambda f = \frac{\omega}{k}$$

é chamada velocidade de fase. Para discutir o que entendemos por velocidade de grupo, vamos considerar o exemplo da onda constituída pela superposição de duas ondas harmônicas de mesma amplitude A , mas de frequências angulares ω' e ω muito próximas uma da outra e números de onda k' e k também muito próximos um do outro, cuja equação pode ser escrita:

$$y(x, t) = A [\text{sen}(k'x - \omega't) + \text{sen}(kx - \omega t)]$$

Pela mesma expressão trigonométrica usada acima, temos:

$$y(x, t) = 2A \cos \left[\frac{(k'-k)x - (\omega' - \omega)t}{2} \right] \text{sen} \left[\frac{(k'+k)x - (\omega'+\omega)t}{2} \right]$$

e como ω' e ω são quase iguais, podemos tomar $\omega' + \omega \approx 2\omega$ e $k' + k \approx 2k$ e ficamos com:

$$y(x, t) = 2A \cos \left[\frac{(k'-k)x - (\omega' - \omega)t}{2} \right] \text{sen}(kx - \omega t)$$

Esta expressão descreve um movimento ondulatório com amplitude modulada. Este movimento está representado, na Fig. 16, pela linha contínua.

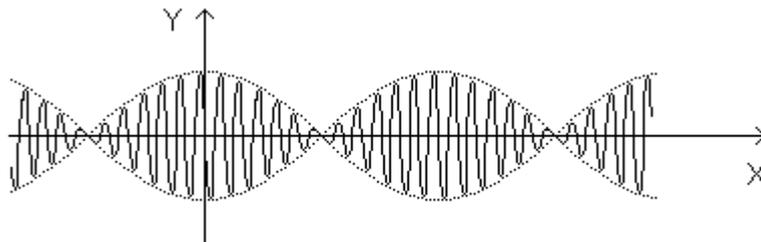


Fig.16

Matematicamente, o movimento ondulatório é descrito pelo fator:

$$\text{sen}(kx - \omega t)$$

e tem, portanto, freqüência f dada por:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

Por outro lado, a amplitude modulada está representada, na Fig.16, pela linha pontilhada. Matematicamente, a amplitude é descrita pelo fator:

$$2A \cos\left[\frac{(k'-k)x - (\omega'-\omega)t}{2}\right]$$

e tem freqüência f' , muito menor do que f , dada por:

$$f' = \frac{\omega' - \omega}{4\pi}$$

Pela expressão matemática de $y(x,t)$ podemos ver que esta amplitude modulada corresponde a um movimento ondulatório que se propaga com uma velocidade, chamada de velocidade de grupo, com módulo:

$$v_G = \frac{\omega' - \omega}{k' - k}$$

O movimento ondulatório descrito por $y(x,t)$ é como uma seqüência de pulsos. Um único pulso (Fig.17) pode ser construído superpondo-se um grande número de ondas harmônicas de comprimentos de onda e freqüências diferentes.

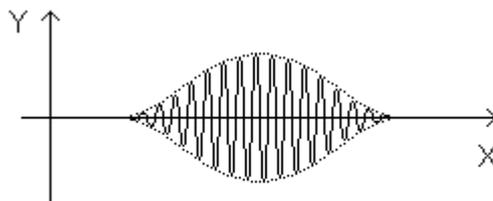


Fig.17

Se o módulo da velocidade de propagação é independente da freqüência, dizemos que o meio pelo qual se propagam as ondas é um meio não dispersivo. Nesse caso, todas as ondas que compõem o pulso se deslocam com a mesma velocidade e a velocidade de grupo, que corresponde à velocidade do pulso, é igual à velocidade de fase, que corresponde à velocidade de cada onda componente. Num meio dispersivo, cada onda harmônica que compõe o pulso se desloca com uma velocidade de módulo diferente e o módulo da velocidade do pulso pode não ser igual a qualquer um dos módulos das velocidades de fase.

Uma onda harmônica que se estende de $-\infty$ a $+\infty$ é caracterizada por um só comprimento de onda e uma só freqüência. Uma onda como essa não é adequada para transmitir informação porque informação implica alguma coisa com um começo e

um fim. Uma informação pode ser codificada por uma seqüência de pulsos e, portanto, viaja com uma velocidade igual à velocidade de grupo que é, no caso de um meio não dispersivo, idêntica à velocidade de fase.

IX. Ondas Estacionárias

Para discutir o conceito de onda estacionária, vamos considerar uma corda muito comprida, esticada ao longo do eixo X, com uma das extremidades fixa na posição $x = 0$. Ao longo dessa corda, propaga-se uma onda progressiva transversal em sentido contrário àquele tomado como positivo para o eixo X. Ao alcançar a posição $x = 0$, a onda é refletida, propagando-se em sentido contrário (Fig.18).

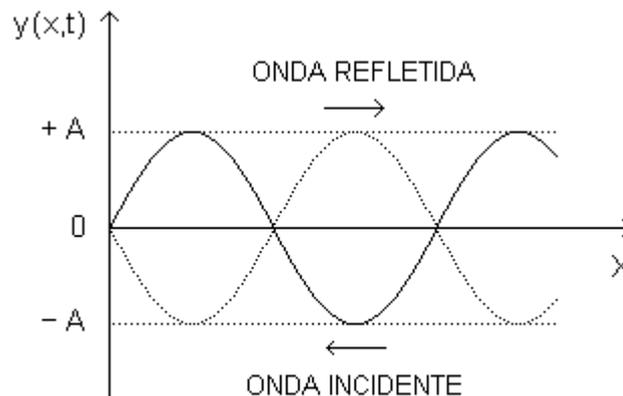


Fig.18

A onda progressiva incidente e a onda progressiva refletida são descritas, respectivamente, pelas expressões:

$$y_I(x,t) = A \operatorname{sen}(kx + \omega t)$$

e

$$y_R(x,t) = A' \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Pelo princípio de superposição, o deslocamento de qualquer partícula da corda em um dado instante é a soma vetorial dos deslocamentos que seriam produzidos pelas ondas individualmente. Assim, podemos escrever, para a onda resultante:

$$y(x,t) = y_I(x,t) + y_R(x,t)$$

ou seja:

$$y(x,t) = A \operatorname{sen}(kx + \omega t) + A' \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

A partícula da corda em $x = 0$ permanece em repouso no referencial considerado, de modo que $y(0,t) = 0$ para qualquer t . Assim:

$$0 = A \operatorname{sen}(\omega t) + A' \operatorname{sen}(-\omega t)$$

e como, da Trigonometria, sabemos que:

$$\text{sen}(-\omega t) = -\text{sen}(\omega t)$$

segue-se imediatamente que:

$$0 = (A - A') \text{sen}(\omega t)$$

e daí, $A = A'$. Em palavras: a onda incidente e a onda refletida têm amplitudes iguais. Além disso, pela relação trigonométrica:

$$\text{sen} A - \text{sen} B = 2 \text{sen} \left(\frac{A - B}{2} \right) \cos \left(\frac{A + B}{2} \right)$$

vem:

$$y(x, t) = 2A \text{sen}(kx) \cos(\omega t)$$

As fases $(kx + \omega t)$ e $(kx - \omega t)$ não aparecem nesta expressão. Por isso, ela não descreve uma onda progressiva, mas uma onda estacionária. O fator:

$$\cos(\omega t)$$

indica que todas as partículas da corda descrevem movimentos harmônicos simples com a mesma frequência $f = \omega/2\pi$ e o fator:

$$2A \text{sen}(kx)$$

indica que a amplitude do MHS de cada partícula depende da sua posição ao longo do eixo X.

Por outro lado, a amplitude da onda estacionária é nula para:

$$kx = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots \infty)$$

e como $k = 2\pi/\lambda$, podemos dizer que a amplitude da onda estacionária é nula em:

$$x = \left(\frac{\lambda}{2} \right) n \quad (n = 0, 1, 2, \dots \infty)$$

Os pontos dados por essa expressão são chamados de nós. Dois nós consecutivos estão separados por uma distância $\lambda/2$. O comprimento de onda λ é dado, em função da frequência e do módulo da velocidade de propagação, pela expressão $\lambda = v/f$.

Vamos considerar, agora, que a corda tem um comprimento L e que suas extremidades estão fixas, uma em $x = 0$ e a outra em $x = L$. Assim, temos a condição adicional $y(L, t) = 0$ para qualquer t . Portanto, da expressão que descreve a onda estacionária, vem:

$$0 = 2A \text{sen}(kL) \cos(\omega t)$$

ou:

$$\text{sen}(kL) = 0$$

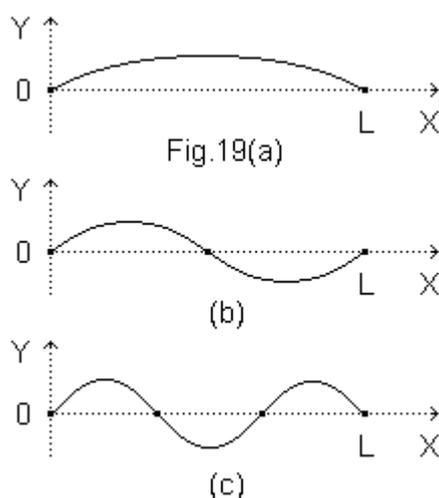
Esta última expressão é verdadeira para:

$$kL = n' \pi \quad (n' = 1, 2, \dots \infty)$$

e como $k = 2\pi/\lambda$, temos:

$$\lambda = \frac{2L}{n'} \quad (n' = 1, 2, \dots \infty)$$

Essa expressão dá os comprimentos de onda das ondas estacionárias que podem ser estabelecidas numa corda de comprimento L com suas extremidades fixas.



As frequências e as posições dos nós correspondentes são dadas por:

$$f = \left(\frac{v}{2L} \right) n'$$

e

$$x = \left(\frac{n}{n'} \right) L$$

e como $x \leq L$, devemos ter $n = 0, 1, 2, \dots n'$.

Desse modo, para $n' = 1$ temos $n = 0$ e $n = 1$. A onda estacionária correspondente tem dois nós, nas posições $x = 0$ e $x = L$ (Fig.19(a)).

Para $n' = 2$ temos $n = 0, n = 1$ e $n = 2$. A onda estacionária correspondente tem três nós, nas posições $x = 0, x = L/2$ e $x = L$ (Fig.19(b)).

Para $n' = 3$ temos $n = 0, n = 1, n = 2$ e $n = 3$. A onda estacionária correspondente tem quatro nós, nas posições $x = 0, x = L/3, x = 2L/3$ e $x = L$ (Fig.19(c)). E assim por diante.

Em uma onda harmônica progressiva, todas as partículas do meio executam movimentos harmônicos simples com a mesma amplitude. Em uma onda estacionária, as partículas do meio também executam movimentos harmônicos simples, mas as

amplitudes dependem das posições das partículas. As partículas cujas posições correspondem aos nós de uma onda estacionária permanecem em repouso no referencial considerado. Como não pode haver fluxo de energia através dos nós, não há fluxo de energia através do meio quando, nele, existe uma onda estacionária. Cada partícula do meio executa o seu particular MHS sem perder ou ganhar energia das partículas vizinhas.

Ondas progressivas que se movem em sentidos contrários, como no caso da corda, discutido acima, produzem ondas estacionárias mesmo se suas amplitudes são diferentes.

A discussão acima foi baseada nas ondas transversais em uma corda por motivos didáticos. Ondas estacionárias podem aparecer tanto associadas a ondas transversais quanto a ondas longitudinais.

Exercício 1

Uma criança produz uma onda estacionária numa corda com 2 m de comprimento (Fig.20). Determine (a) o número de nós, (b) o comprimento de onda e (c) a amplitude da onda produzida.

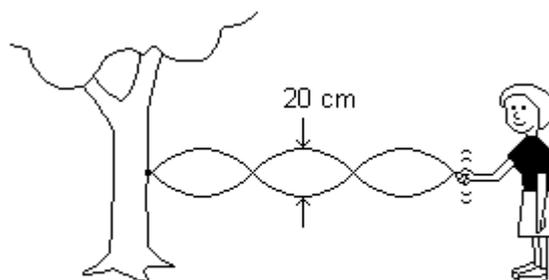


Fig.20

Exercício 2

Uma corda com 2 m de comprimento tem as extremidades fixas. Procurando estabelecer ondas estacionárias com frequência de 120 Hz, um estudante de Física obteve o terceiro harmônico. Determine (a) o comprimento de onda e (b) a distância entre nós adjacentes.

Exercício 3

Uma onda estacionária, numa corda com as duas extremidades fixas, é descrita pela expressão:

$$y(x,t) = \frac{1}{4} \sin\left(\frac{x}{20}\right) \cos(400t)$$

em que x e y são dados em centímetros e t, em segundos. Calcule a distância entre dois nós adjacentes da corda.

Exercício 4

Um fio de aço de 120 cm de comprimento é mantido esticado com as duas extremidades fixas. Neste fio, existe uma onda mecânica estacionária com 5 nós e frequência de 60 Hz. Podemos pensar que essa onda estacionária é formada pela superposição de duas ondas progressivas que se propagam em sentidos contrários. Calcule o módulo da velocidade de propagação dessas ondas progressivas.

X. A Cuba de Ondas

Um arranjo experimental interessante para observar os fenômenos mais comuns característicos das ondas, quais sejam, a reflexão, a refração, a interferência e a difração, é o que chamamos de cuba de ondas.

O arranjo consiste de uma cuba rasa, transparente, com uma lâmina de água com profundidade de meio centímetro, uma fonte de luz intensa iluminando o fundo da cuba, de baixo para cima, e um espelho, colocado sobre a cuba de modo que possa refletir as sombras produzidas pelas perturbações na água numa tela fixa em uma parede vertical ou na própria parede, se ela tiver uma cor clara. A cuba com água pode ser colocada, por exemplo, sobre um retro-projetor (Fig.21).

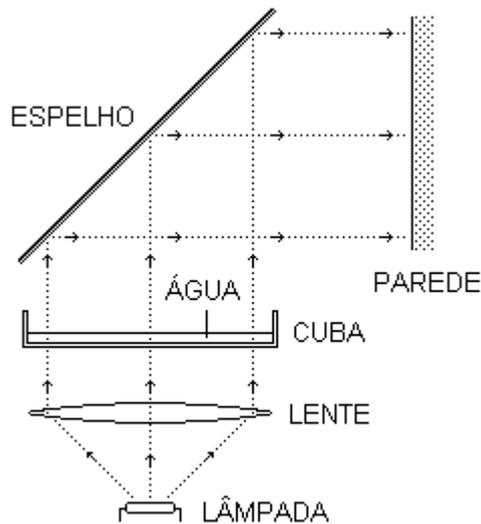


Fig.21

Uma pequena esfera, mergulhada periodicamente na água, ou gotas de água pingadas com um conta-gotas, podem ser fontes geradoras convenientes de ondas.

Em baixas frequências, o comprimento de onda da onda produzida na água da cuba pode ter vários centímetros. Nessas condições, o módulo da velocidade de propagação da onda, num referencial fixo na cuba, é dado pela expressão:

$$v \approx \sqrt{gh}$$

em que g representa o módulo da aceleração gravitacional e h , a profundidade da água na cuba. Portanto, quanto mais rasa for a lâmina de água, menor será o módulo da velocidade de propagação da onda.

Frente de Onda e Raio

Vamos considerar a onda bidimensional produzida na superfície da água de uma cuba de ondas por uma seqüência de gotas que caem no mesmo ponto (Fig.22).

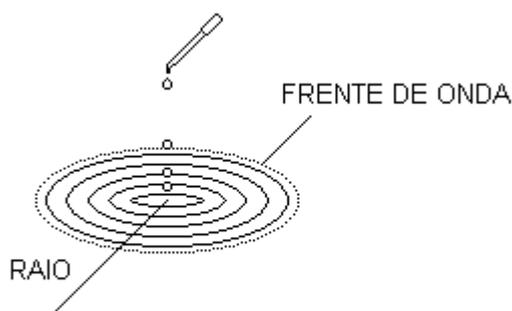


Fig.22

As circunferências (em perspectiva) representem as cristas da onda, ou seja, os pontos do meio com elongação máxima relativamente à posição de equilíbrio. Todos esses pontos oscilam em fase. Os pontos sobre qualquer circunferência com centro no ponto de origem das ondas oscilam em fase. Quando uma onda se propaga não pela superfície, mas pelo interior do meio, o conjunto de pontos que oscilam com a mesma fase constitui uma superfície. Se o meio é isotrópico, de modo que o módulo da velocidade de propagação da onda é o mesmo qualquer que seja a direção de propagação, a superfície tem a forma esférica e a onda é chamada de onda esférica.

Todo lugar geométrico contínuo dos pontos do meio que oscilam em fase é chamado de frente de onda.

Toda linha ao longo da qual se propagam as frentes de onda se chama raio.

Um meio é chamado de isotrópico quando suas propriedades são as mesmas ao longo de quaisquer direções. Nos meios isotrópicos, as frentes de onda são circunferências ou superfícies esféricas e todo raio é uma linha reta perpendicular às frentes de onda. Desse modo, toda reta que passa pelo ponto de origem das ondas e por qualquer ponto de qualquer frente de onda é um raio.

XI. Reflexão

A velocidade de propagação de uma onda depende das propriedades físicas do meio através do qual ela se propaga num referencial em que esse meio como um todo está em repouso. Esse fato é a base dos fenômenos de reflexão e refração, que acontecem quando a onda alcança a superfície de separação entre dois meios.

A onda refletida é a onda que volta pelo mesmo meio onde se propagou a onda incidente. A onda refratada é a onda que se propaga pelo outro meio. A energia da onda incidente fica em parte na onda refletida e em parte na onda refratada.

Dizemos que existe reflexão especular quando a onda refratada pode ser ignorada e a quase totalidade da energia fica na onda refletida.

Podemos observar o fenômeno da reflexão de uma onda em uma cuba de ondas colocando uma régua com parte acima da superfície da água e deixando cair uma seqüência de gotas para produzir uma onda sobre essa superfície (Fig.23).

Vamos considerar o ponto O como sendo o lugar em que as gotas atingem a superfície da água, gerando a onda. A forma da onda refletida é exatamente igual à forma que teria uma onda gerada no ponto O', simétrico a O em relação à superfície refletora da régua.

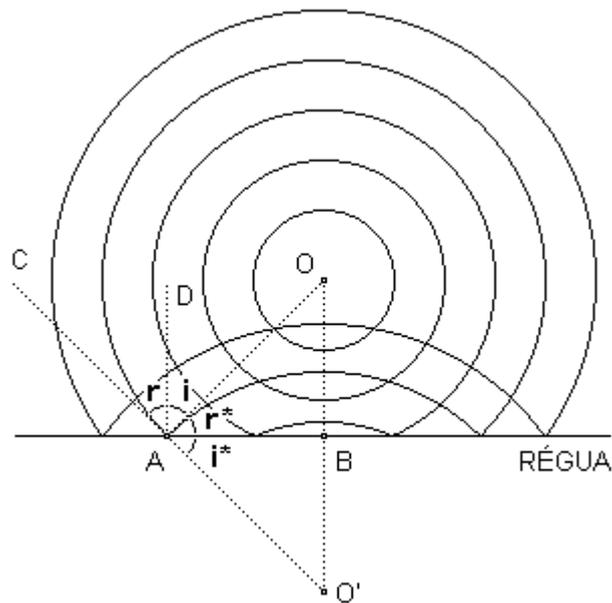


Fig.23

Consideremos também um ponto A qualquer sobre a superfície refletora da régua e o segmento de reta AD, perpendicular à esta superfície em A. A linha OA é o raio incidente no ponto A e a linha AC é o correspondente raio refletido. Desse modo, i é o ângulo de incidência, r é o ângulo de reflexão, i^* é o ângulo entre a superfície refletora da régua e o segmento AO' e r^* é o ângulo entre a superfície refletora da régua e o segmento AO.

Como $i + r^* = 90^\circ$ e como $r^* = i^*$, já que os pontos O e O' são simétricos em relação à superfície refletora da régua, temos:

$$i + i^* = 90^\circ$$

Por outro lado, como $r + i + r^* + i^* = 180^\circ$ e como $i + r^* = 90^\circ$, temos também:

$$r + i^* = 90^\circ$$

Comparando as duas expressões, obtemos: $i = r$. Em palavras: o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão.

XII. Refração

Podemos observar, em uma cuba de ondas, o fenômeno da refração de uma onda, isto é, a mudança na velocidade de propagação da onda quando ela passa de um meio para outro. Para tanto, colocamos algum objeto plano, como uma lâmina de vidro, sobre uma parte do fundo da cuba. Com isso, obtemos duas regiões de profundidades diferentes: a região h_1 , com a profundidade original h_1 , e a região h_2 , sobre o objeto plano, com profundidade h_2 , menor do que h_1 .

Para gerar uma onda sobre a superfície da água, deixamos cair uma seqüência de gotas em algum ponto da região h_1 (Fig.24(a)). Desse modo, quando essa onda entra na região h_2 , onde a água tem menor profundidade, o módulo da sua velocidade de propagação fica menor. A freqüência da onda é característica da fonte emissora. Assim, quando a onda passa da região h_1 para a região h_2 , a freqüência permanece a mesma, mas como o módulo da velocidade de propagação fica menor, o comprimento de onda também fica menor.

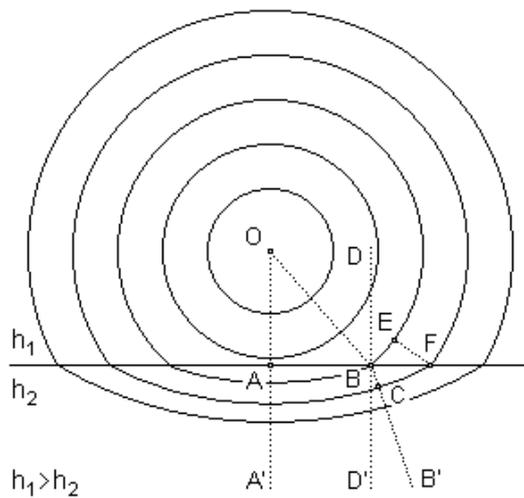
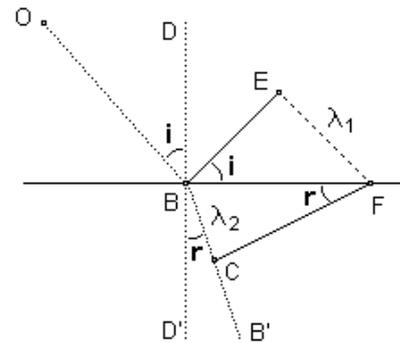


Fig.24(a)



(b)

Vamos considerar o ponto O como sendo o lugar da região h_1 em que as gotas atingem a superfície da água, gerando a onda. Vamos considerar também o raio OAA' , perpendicular à linha de separação entre as duas regiões consideradas, e o raio genérico OBB' .

A refração não vem acompanhada, necessariamente, de mudança de direção, como podemos ver pelo raio OAA' . Só existe mudança de direção se o raio incidente não é perpendicular à superfície de separação entre os dois meios considerados.

Durante o mesmo intervalo de tempo Δt , a onda se desloca uma distância como a de E para F, na região h_1 , e de B para C, na região h_2 , e podemos pensar que um ponto onde a onda passa de uma região para outra se desloca uma distância como a de B para F.

Vamos considerar a reta DD' como perpendicular à linha de separação entre a região h_1 e a região h_2 no ponto B, i como o ângulo de incidência e r como o ângulo de refração do raio OBB' (Fig.24(a) e (b)).

Tomando um pequeno intervalo de tempo Δt , podemos considerar BEF e BCF como triângulos retângulos, com hipotenusa comum BF. O ângulo em B no triângulo

BEF é igual a i e o ângulo em F no triângulo BCF é igual a r . Então, podemos escrever:

$$\text{sen } i = \frac{\lambda_1}{BF}$$

e

$$\text{sen } r = \frac{\lambda_2}{BF}$$

em que λ_1 e λ_2 são os comprimentos de onda da onda na região h_1 e na região h_2 , respectivamente.

Como a frequência da onda não muda quando ela passa de uma região para outra, da relação $f = v/\lambda$ temos:

$$\frac{v_1}{\lambda_1} = \frac{v_2}{\lambda_2}$$

Nesta expressão, v_1 e v_2 representam os módulos das velocidades de propagação da onda na região h_1 e na região h_2 , respectivamente. Com estas últimas três expressões, vem:

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} = \text{constante}$$

O cociente v_1/v_2 , simbolizado por n_{21} , é chamado de índice de refração da região h_2 em relação à região h_1 . Assim:

$$n_{21} = \frac{\text{sen } i}{\text{sen } r}$$

Esta expressão representa, matematicamente, a lei de Snell. Em palavras: quando uma onda atravessa a superfície de separação entre dois meios, o cociente do seno do ângulo de incidência pelo seno do ângulo de refração é uma constante característica desses dois meios.

XIII. Construção de Huygens

A construção de Huygens é um procedimento puramente geométrico, que permite determinar a forma e a posição da frente de onda num instante t_2 a partir da forma e da posição da frente de onda em um instante anterior t_1 . Todos os pontos da frente de onda no instante t_1 são considerados como fontes de ondas esféricas secundárias. A frente de onda no instante t_2 é a envolvente dessas ondas secundárias como se apresentam nesse instante.

Como exemplo, vamos representar a refração de uma onda plana que passa do meio 1 para o meio 2 desenhando várias frentes de onda geradas segundo a construção de Huygens e desenhando também um raio, para evidenciar a mudança na direção de propagação da onda quando a incidência não é perpendicular à superfície de separação entre os dois meios. Em cada frente de onda, representamos apenas

cinco pontos que atuam como fontes de ondas secundárias, de cada uma das quais apenas uma pequena parte aparece (Fig.25). O módulo da velocidade de propagação da onda fica menor quando ela entra no meio 2, de modo que o comprimento de onda nesse meio é menor do que o comprimento de onda no meio 1. Isto está indicado pela menor distância entre as frentes de onda no meio 2.

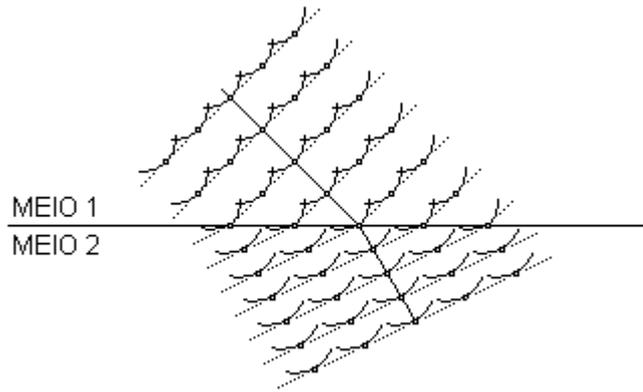


Fig.25

A construção de Huygens pode ter sentido físico como modelo para descrever a propagação de uma onda em um meio elástico, onde essa que resulta da vibração das partículas (átomos ou moléculas) do meio. Contudo, essa construção não tem sentido físico como modelo para descrever uma onda eletromagnética que se propaga no vácuo, onde não existem partículas que possam vibrar.

XIV. Difração

Difração é o fenômeno pelo qual uma onda é distorcida por um obstáculo. Este obstáculo pode ser um pequeno objeto que bloqueia a passagem de uma parte das frentes de onda ou uma fenda que permite a passagem de apenas uma parte das frentes de onda.

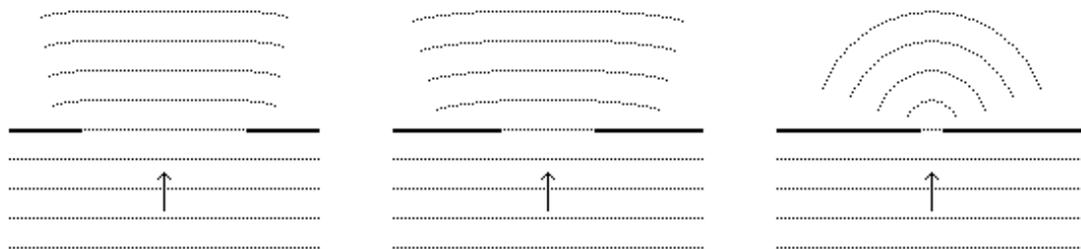


Fig.26(a)

(b)

(c)

Podemos observar o fenômeno da difração em uma cuba de ondas, produzindo uma onda plana numa das regiões da cuba e obstruindo sua passagem para outra região com duas lâminas separadas por uma abertura entre elas. Quando a dimensão da abertura é muito maior do que o comprimento de onda da onda plana, esta quase não se propaga atrás das lâminas (Fig.26(a)). Quando a dimensão da abertura é da

ordem de vários comprimentos de onda da onda plana, esta rodeia visivelmente as bordas das lâminas (Fig.26(b)). Quando a dimensão da abertura é comparável ao comprimento de onda da onda plana, esta contorna as bordas das lâminas, de modo que, atrás delas, a superfície da água fica quase completamente perturbada (Fig.26(c)). Neste último caso, a abertura parece ser a fonte independente de uma onda que se propaga atrás das lâminas, em todas as direções.

As dimensões do objeto ou da abertura para as quais se observa o fenômeno da difração de uma dada onda dependem do comprimento de onda dessa onda: quanto menores tais dimensões, quando comparadas ao comprimento de onda, tanto mais notável é o fenômeno. Quando as dimensões do obstáculo ou da abertura são comensuráveis com o comprimento de onda, a difração se manifesta nas proximidades de tal obstáculo ou abertura.

A difração pode ser descrita pela construção de Huygens. Vamos considerar, como exemplo, a difração de uma onda que atravessa uma abertura formada por dois anteparos. Os pontos da frente de onda que chega aos anteparos e à abertura se comportam como fontes de ondas secundárias. As ondas secundárias originadas nos pontos da frente de onda que se encontram frente aos anteparos são bloqueadas por esses anteparos. As ondas secundárias originadas nos pontos da frente de onda que se encontram frente à abertura não são bloqueadas e, por isso, determinam a forma da frente de onda na região além da abertura.

Exercício 1

Discuta um fenômeno cotidiano em que ocorre difração.

Exercício 2

Use a construção de Huygens para descrever a difração de uma onda que contorna um obstáculo.

XV. Ondas Sonoras

Já vimos que se os pontos do meio pelo qual passa uma onda oscilam numa direção paralela à direção de propagação da onda, ela é chamada de onda longitudinal. As ondas sonoras são ondas mecânicas longitudinais que se propagam em meios materiais. A onda que se propaga no ar, gerada pelo movimento periódico de vai e vem da membrana de um alto-falante e a onda em um sólido qualquer, gerada quando golpeamos ritmicamente qualquer região dele, são exemplos de ondas sonoras.

Num referencial fixo no meio, o módulo da velocidade de propagação de uma onda mecânica depende das características do meio. No caso em que o meio é um gás, as perturbações que formam as ondas são transmitidas de um ponto a outro através das colisões mútuas das partículas que formam o gás. Desse modo, quanto maior a densidade do gás e quanto mais alta a sua temperatura, maior é o módulo da velocidade de propagação das ondas.

Nos meios sólidos, as partículas constituintes estão presas, a posições fixa, pelas interações mútuas. Essas interações propagam com grande rapidez as perturbações que caracterizam as ondas mecânicas. Por isso, o módulo da velocidade de propagação das ondas sonoras é maior nos sólidos do que nos gases.

As partículas que formam os líquidos estão menos ligadas umas às outras, em comparação com as partículas que formam os sólidos, mas estão mais ligadas se

comparadas às partículas que formam os gases. Por isso, o módulo da velocidade de propagação das ondas sonoras nos líquidos é maior do que nos gases, mas menor do que nos sólidos.

A tabela a seguir apresenta alguns valores do módulo da velocidade de propagação das ondas sonoras, representado por v_s , em diferentes meios e para diferentes temperaturas.

Meio	v_s (m/s)
Oxigênio (0°C)	317
Ar (0°C)	332
Ar (20°C)	344
Hidrogênio (0°C)	1300
Água (0°C)	1404
Água (20°C)	1450
Ferro	5100
Granito	6000

Som, Ultra-Som e Infra-Som

Ondas sonoras são ondas mecânicas longitudinais que se propagam em meios materiais. As ondas sonoras com frequências entre 20 Hz e 20000 Hz podem estimular o ouvido humano, ou seja, são audíveis. Esses números possam variar de uma pessoa a outra e com a idade.

A sensação que os seres humanos experimentam por efeito das ondas sonoras nessa faixa de frequência é o que chamamos de som.

Qualquer onda mecânica longitudinal com frequência menor do que 20 Hz é chamada de infra-som e qualquer onda mecânica longitudinal com frequência maior do que 20000 Hz é chamada de ultra-som. Infra-sons e ultra-sons não estimulam o ouvido humano, isto é, são inaudíveis.

Eco e Reverberação

O ouvido humano pode distinguir, uma da outra, ondas sonoras recebidas com um intervalo de tempo de no mínimo um décimo de segundo.

Consideremos uma fonte que emite ondas sonoras. As ondas refletidas por um obstáculo e as ondas que chegam diretamente ao ouvido de um ser humano podem ser percebidas com um intervalo de tempo menor do que 0,1s. Nesse caso, elas se confundem e dizemos que há reverberação. Por outro lado, as ondas refletidas por um obstáculo e as ondas que chegam diretamente ao ouvido de um ser humano podem ser percebidas com um intervalo de tempo maior do que 0,1s. Nesse caso, as ondas não se confundem e dizemos que há eco.

Exercício 1

Discuta quais dos seguintes fenômenos ocorrem com ondas longitudinais e/ou com ondas transversais: (a) interferência, (b) reflexão, (c) refração, (d) difração e (e) polarização.

Exercício 2

Mostre que, no ar a 20°C , as ondas sonoras com frequências entre 20 Hz e 20000 Hz têm comprimentos de onda entre 1,7 cm e 17 m.

Exercício 3

Em dois pontos A e B, separados por uma distância de 1 m, estão colocados dois alto-falantes que emitem ondas sonoras de mesma frequência e em fase (Fig.27).

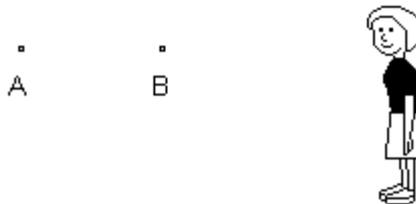


Fig.27

Partindo de 10 Hz, a frequência das ondas sonoras vai aumentando com o tempo. Calcule a frequência para a qual a observadora deixa de escutar as ondas sonoras.

Exercício 4

Duas pessoas estão separadas por um muro espesso numa região plana e deserta. Uma não pode ver a outra, mas a escuta claramente. Explique como isso é possível.

XVI. Qualidades Fisiológicas do Som

Os seres humanos podem distinguir os sons uns dos outros pelas suas qualidades fisiológicas: altura, intensidade e timbre. Essas qualidades fisiológicas estão relacionadas às diferentes propriedades das ondas sonoras.

Altura

A altura é a qualidade fisiológica que nos permite distinguir os sons graves dos agudos. Em termos físicos, essa qualidade está associada à frequência das ondas sonoras: às frequências baixas correspondem sons graves e às frequências altas, sons agudos.

Intensidade

Intensidade é a qualidade fisiológica que nos permite distinguir os sons fortes dos fracos. Em termos físicos, intensidade é a quantidade de energia transportada pela onda sonora através de uma superfície de área unitária perpendicular à direção de propagação por unidade de tempo. A intensidade de uma onda é proporcional ao quadrado da sua amplitude. No caso de uma onda sonora, a amplitude é dada pela diferença entre a pressão de uma região de compressão (ou de rarefação) máxima e a pressão atmosférica normal. No SI, a unidade de intensidade é W / m^2 .

Uma grandeza associada à intensidade é o nível sonoro, para o qual usamos uma unidade adimensional, o decibel (simbolizado por dB). A tabela abaixo mostra alguns sons e o correspondente nível sonoro.

Som	Nível Sonoro (dB)	Intensidade (W / m^2)
Sussurro	20	10^{-10}
Dormitório Tranquilo de Dia	30	10^{-9}
Conversa Normal	60	10^{-6}
Rua com Muito Tráfego	90	10^{-3}
Buzina de Automóvel	100	10^{-2}
Limiar de Dor	120	1
Motor de Avião a Jato	130	10

A escala de níveis sonoros é definida por:

$$n_{dB}(I) = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_0} \right) \text{dB}$$

com

$$I_0 = 10^{-12} \text{ Watt / m}^2$$

Como $\log_{10} 1 = 0$, vem: $n_{dB}(I_0) = 0$. Assim, uma onda sonora com intensidade de $10^{-12} \text{ Watt/m}^2$ tem um nível sonoro de zero decibel.

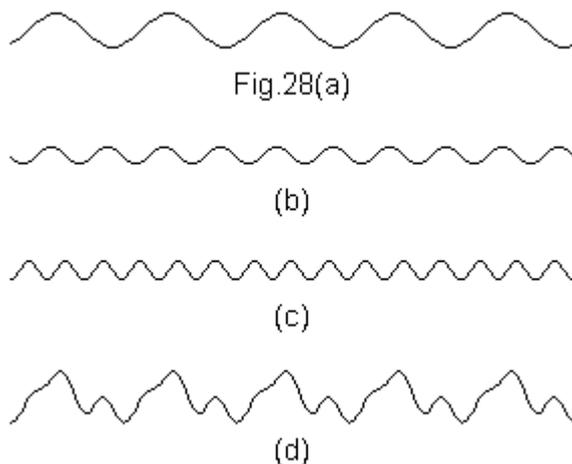
O som de uma conversa normal tem uma intensidade 10 mil vezes maior do que o som de um sussurro. A diferença de 40 dB entre os níveis sonoros corresponde a uma razão de 10000 entre as intensidades.

Por outro lado, qualquer som acima de 85 dB pode causar perda de audição. Essa perda depende da intensidade do som e do período de exposição. Uma exposição a um som de 90 dB durante 8 horas ou uma exposição a um som de 120 dB durante alguns segundos já causam danos.

Timbre

Timbre é a qualidade fisiológica que nos permite distinguir os sons de diferentes instrumentos mesmo que eles estejam produzindo a mesma nota musical.

Um diapasão, por exemplo, produz uma onda sonora pura, isto é, associada a uma única frequência. Os instrumentos musicais, ao contrário, produzem ondas mais complexas, que resultam da superposição do modo fundamental (que define a nota) com um conjunto de harmônicos superiores. O conjunto e a intensidade desses harmônicos diferem de um instrumento para outro e definem o timbre do instrumento.



Como ilustração, a Fig.28(d) representa uma onda complexa, formada pela superposição do modo fundamental (Fig.28(a)) com o primeiro (Fig.28(b)) e o segundo (Fig.28(c)) harmônicos.

Exercício 1

Uma flauta emite ondas sonoras que são percebidas por uma pessoa como sons agudos. Uma tuba emite ondas sonoras que são percebidas como sons graves. (a) Diga que instrumento está emitindo ondas sonoras com comprimentos de onda menores. (b) Diga de que instrumento vêm as ondas sonoras melhor escutadas por uma pessoa atrás de um obstáculo e justifique sua resposta.

Exercício 2

Audiometria é um exame que avalia as capacidades auditivas de uma pessoa. Numa audiometria, uma pessoa foi capaz de escutar ondas sonoras com frequências entre 60 Hz e 3400 Hz. Sabendo que o módulo da velocidade do som naquele dia era de 340 m/s, calcule o comprimento de onda do som mais agudo que esta pessoa escutou.

Exercício 3

Numa discussão, o nível sonoro da voz de uma pessoa passa de 60 dB para 70 dB. Calcule o aumento na intensidade das ondas sonoras provocadas pela pessoa.

Exercício 4

Um automóvel vem de fábrica com uma buzina cujo nível sonoro é de 100 dB. Calcule o nível sonoro produzido por dois desses automóveis buzinando juntos.

XVII. Notas Musicais

Um objeto que vibra, como uma corda de violão ou de piano, a palheta de um saxofone ou a membrana de um tambor ou de um alto-falante, movimentando-se para frente e para trás, repetidamente, gera regiões de compressão e de rarefação que se propagam no ar como uma onda sonora.

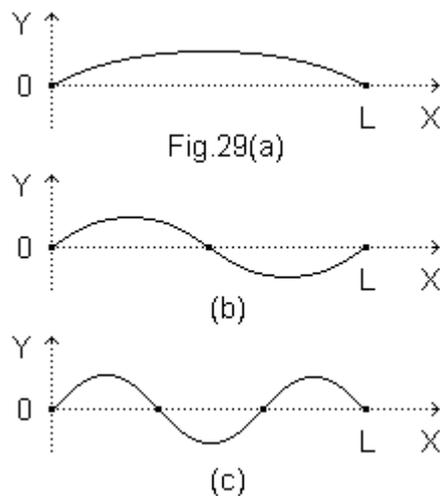
O volume (ou intensidade) de um som está associado à quantidade de energia transportada pela onda sonora. O volume relativo das várias notas que compõem uma dada música é componente importante da sua execução porque contribui para despertar emoções no ouvinte. A intensidade de uma nota pode ser controlada, no violão, pela força exercida sobre a corda, ao tocá-la, no violino, pela força do arco sobre a corda, no piano, pela força com que a tecla é tocada, numa corneta, pela intensidade do sopro, e assim por diante.

Ondas Estacionárias numa Corda

Já vimos que as ondas estacionárias numa corda de comprimento L , com as duas extremidades fixas, podem ter os seguintes comprimentos de onda:

$$\lambda = \frac{2L}{n'} \quad (n' = 1, 2, \dots, \infty)$$

Se $n' = 1$, $\lambda = 2L$ (Fig.29(a)). Dizemos que a correspondente onda estacionária é o modo fundamental ou primeiro harmônico.



Se $n' = 2$, $\lambda = L$ (Fig.29(b)). Dizemos que a correspondente onda estacionária é o segundo harmônico. Se $n' = 3$, $\lambda = 2L/3$ (Fig.29(c)). Dizemos que a correspondente onda estacionária é o terceiro harmônico. E assim por diante. A corda, vibrando

segundo qualquer uma de tais ondas estacionárias, produz, no ar, ondas sonoras com a frequência correspondente.

Ondas Estacionárias em Tubos Abertos

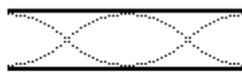
Nas extremidades de um tubo aberto, a onda sonora exibe ventres, isto é, regiões onde a pressão do ar é a pressão atmosférica normal. A expressão matemática que dá os comprimentos de onda das ondas estacionárias num tubo aberto de comprimento L é idêntica àquela para as ondas estacionárias numa corda de comprimento L com as duas extremidades fixas:

$$\lambda = \frac{2L}{n'} \quad (n' = 1, 2, \dots \infty)$$

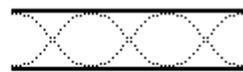
Desse modo, podemos ter $\lambda = 2L$, correspondendo ao modo fundamental ou primeiro harmônico (Fig.30(a)), $\lambda = L$, correspondendo ao segundo harmônico (Fig.30(b)), $\lambda = 2L/3$, correspondendo ao terceiro harmônico (Fig.30(c)), e assim por diante.



Fig.30(a)



(b)



(c)

Ondas Estacionárias em Tubos Fechados

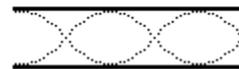
Na extremidade fechada de um tubo, a onda sonora exibe um nó, isto é, uma região de compressão máxima ou rarefação máxima.



Fig.31(a)



(b)



(c)

As ondas estacionárias, nesse caso, podem ter os seguintes comprimentos de onda: $\lambda = 4L$, correspondendo ao modo fundamental ou primeiro harmônico (Fig.31(a)), $\lambda = 4L / 3$, correspondendo ao segundo harmônico (Fig.31(b)), $\lambda = 4L / 5$, correspondendo ao terceiro harmônico (Fig.31(c)), e assim por diante.

Notas Musicais

Quando uma corda é posta a vibrar, desenvolve-se nela uma onda complexa, que é a superposição do modo fundamental com uma série de harmônicos superiores. Nota musical é a onda sonora desenvolvida no ar por essa onda complexa. O mesmo vale para uma coluna de ar dentro de um tubo ou para uma membrana. A nota é musical, ou seja, agradável ao ouvido humano, porque as frequências das

componentes (o modo fundamental e os harmônicos) guardam entre si relações matemáticas simples. Caso contrário, a onda sonora seria associada a um som desagradável (ruído).

De qualquer forma, é a frequência do modo fundamental que define a nota. Por exemplo, independentemente dos harmônicos que possam se somar ao modo fundamental, se esse tem uma frequência de 256 Hz, a nota é chamada dó.

O Timbre do Instrumento

Um diapasão oscila com sua frequência natural própria. Obrigado a oscilar por um impulso periódico externo numa frequência diferente, ele o fará com uma amplitude pequena. Contudo, obrigado a oscilar com sua frequência natural, ele o faz com amplitude cada vez maior, mesmo que o impulso externo periódico seja pouco intenso. A coincidência da frequência do impulso periódico externo com a frequência natural é o que chamamos de ressonância.

Quase todos os instrumentos musicais possuem uma caixa de ressonância, capaz de aumentar a amplitude apenas de determinados harmônicos e, com isso, definir a qualidade das suas notas musicais ou, como dizemos, o seu timbre.

Escalas Musicais

Uma escala musical é uma sucessão de notas de frequências (alturas) crescentes, cujas relações têm efeito agradável ao ouvido humano.

Duas notas estão separadas por uma oitava quando a frequência de uma delas é o dobro da outra. Desse modo, a definição de uma escala deve abarcar uma oitava porque, na oitava seguinte, as frequências das notas são o dobro das correspondentes na oitava anterior. Como exemplo, consideremos a escala diatônica maior, em que as frequências das notas compreendidas numa oitava obedecem às seguintes relações matemáticas entre suas frequências:

Nota	Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
Relação	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
f (Hz)	256	288	320	341,3	384	426,7	480	512

Notas e Instrumentos

Os instrumentos musicais fazem vibrar o ar de diversas maneiras. O violão e o piano, por cordas, a flauta, por uma borda pontiaguda e o saxofone, por uma lingüeta flexível no caminho do ar soprado, o tambor, por uma membrana, etc.

Uma corda comprida dá uma nota mais grave do que uma corda curta. Assim, no violão e no violino, podemos obter a nota desejada diminuindo apropriadamente o comprimento da corda com os dedos de uma das mãos. No caso de um piano ou de uma harpa, existem cordas com todos os comprimentos correspondentes às notas do instrumento.

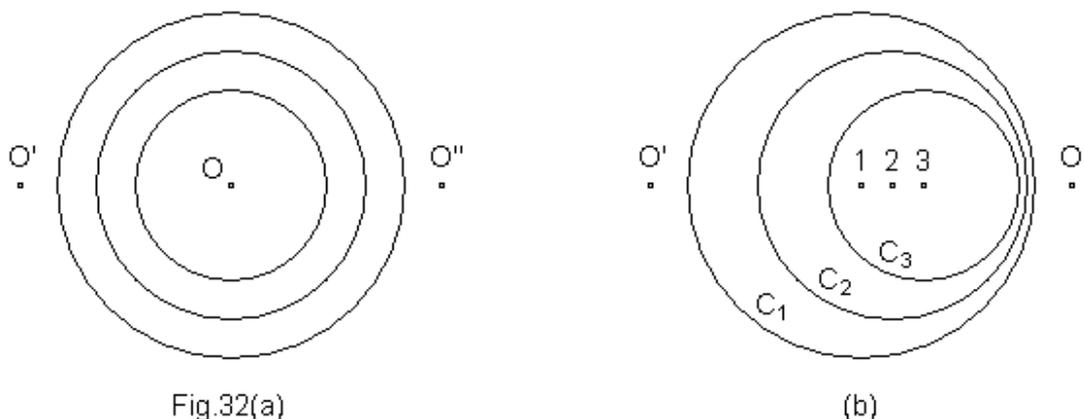
Por outro lado, como a altura da nota produzida por uma corda depende, além do seu comprimento, também da tensão e da massa por unidade de comprimento, as cordas são esticadas por tensões diferentes e/ou têm diâmetros diferentes.

Um tubo comprido dá uma nota mais grave do que um tubo curto. Assim, podemos obter a nota desejada controlando o comprimento efetivo do tubo, fechando alguns orifícios, como no caso de uma flauta, abrindo, como no caso de um saxofone, ou movendo uma vara em forma de U, como no caso de um trombone. No caso de um órgão, existem tubos com os comprimentos correspondentes às notas do instrumento.

XVIII. Efeito Doppler

Caso alguns pulsos sejam emitidos com uma dada frequência, de uma fonte sonora, as correspondentes frentes de onda são superfícies esféricas.

A Fig.32(a) representa as frentes de onda caso a fonte dos pulsos, localizada em O, esteja em repouso em relação aos observadores em O' e em O''. Nesta figura, as frentes de onda são indicadas por seções circulares planas. Para esses observadores, as frentes de onda são concêntricas e igualmente espaçadas, isto é, chegam até eles com a mesma frequência com que os pulsos foram emitidos.



A Fig.32(b) representa as frentes de onda caso a fonte dos pulsos esteja em movimento em relação aos observadores em O' e em O''. Também nesta figura, as frentes de onda são indicadas por seções circulares planas. Neste caso, para esses observadores, as frentes de onda deixam de ser concêntricas. Aqui, C₁, C₂ e C₃ representam as frentes de onda dos pulsos emitidos quando a fonte estava nas posições 1, 2 e 3, respectivamente. As frentes de onda chegam ao observador em O' com uma frequência menor do que aquela com que os pulsos foram emitidos e chegam ao observador em O'' com uma frequência maior do que aquela com que os pulsos foram emitidos.

A mudança na frequência devido ao movimento relativo entre a fonte e o observador é chamada de efeito Doppler. O efeito Doppler acontece com qualquer movimento ondulatório e o espaçamento das frentes de onda está associado à velocidade relativa entre a fonte e o observador.

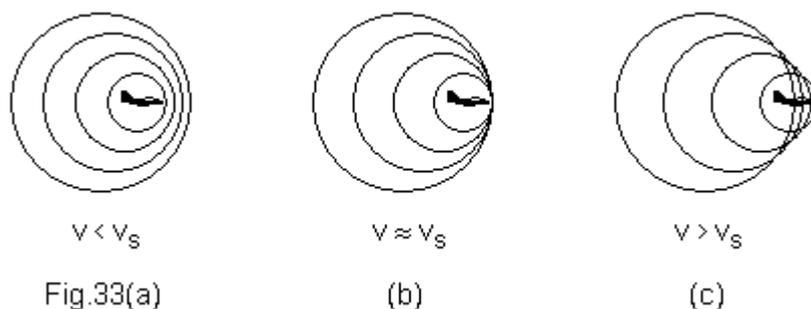
Devido ao efeito Doppler, o som da sirene de uma ambulância parece-nos mais agudo, quando ela se aproxima de nós, e parece-nos mais grave, quando ela se afasta de nós, em comparação ao som da sirene da mesma ambulância quando ela está parada em relação a nós.

O efeito Doppler explica também o deslocamento das frequências da luz proveniente das estrelas, quando observada da Terra. Se uma estrela está se aproximando da Terra, seus raios luminosos são observados com frequências maiores. Como, no espectro luminoso, as frequências mais altas correspondem à cor azul, esse aumento de frequência é chamado de deslocamento para o azul. Se uma estrela está se afastando da Terra, seus raios luminosos são observados com frequências menores. Como, no espectro luminoso, as frequências mais baixas correspondem à cor vermelha, essa diminuição de frequência é chamada de deslocamento para o vermelho.

XIX. A Barreira do Som

Na discussão que se segue, vamos considerar um referencial fixo no solo e, nesse referencial, a atmosfera imóvel.

Um objeto que se movimenta, na atmosfera, com uma velocidade de módulo v , gera pulsos esféricos de pressão. Esses pulsos se propagam com velocidade de módulo v_s , igual ao módulo da velocidade das ondas sonoras. Os pulsos ficam tanto mais próximos uns dos outros, à frente do objeto, e tanto mais afastados uns dos outros, atrás dele, quanto maior o módulo da velocidade do objeto (Fig.33(a)).



Quando $v \approx v_s$, os pulsos à frente do objeto se sobrepõem, formando um pulso único, de amplitude bem maior do que a amplitude de qualquer um dos pulsos originais (Fig.33(b)). Desse modo, à frente do objeto, a pressão atmosférica fica bem maior do que o seu valor normal. Quando $v = v_s$, esse pulso único fica com uma amplitude muito grande e recebe o nome (impróprio) de onda de choque.

Se o objeto que se movimenta na atmosfera é um avião, cada ponto de sua superfície externa se comporta como uma fonte de pulsos de pressão. Além disso, quando o módulo da velocidade do avião se aproxima do módulo da velocidade das ondas sonoras, começam a se formar ondas de choque sobre as asas e perto do nariz. Isto representa um grande obstáculo ao vôo porque aparecem problemas estruturais e de pilotagem, além de uma grande resistência ao avanço do avião, devido à grande pressão da atmosfera à sua frente. Todas estas dificuldades constituem o que costumamos chamar de barreira do som.

Ao nível do mar e em temperatura ambiente de 15°C , o módulo da velocidade das ondas sonoras na atmosfera é:

$$v_s \approx 344 \text{ m/s} \approx 1238 \text{ km/h}$$

Definimos o número de Mach, simbolizado por M , como a razão entre o módulo da velocidade de um objeto na atmosfera e o módulo da velocidade das ondas sonoras:

$$M = \frac{v}{v_s}$$

Velocidades para as quais $M < 1$ são chamadas de velocidades subsônicas e velocidades para as quais $M > 1$ são chamadas de velocidades supersônicas. As dificuldades ao vôo, apontadas acima, ficam bastante reduzidas para velocidades supersônicas com $M > 1,2$ porque, nessas velocidades, as ondas de choque aparecem destacadas do avião, um pouco à sua frente.

Cone de Mach

Vamos pensar num corpo pequeno, como o nariz de um avião, que se move, no referencial considerado, na horizontal, em linha reta, com velocidade v supersônica, isto é, com $v > v_s$ (Fig.34).

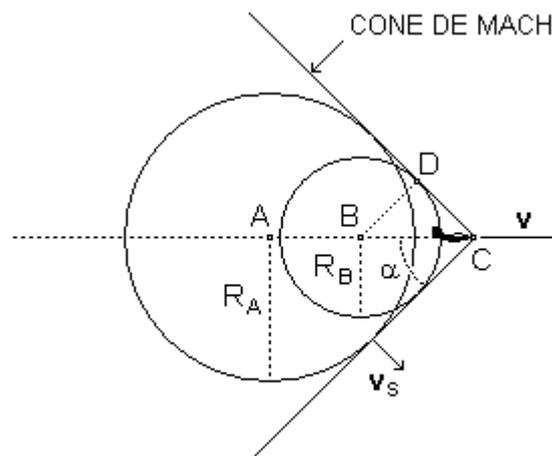


Fig.34

No instante t , o corpo está no ponto C . Ao passar pelo ponto A , no instante anterior t_1 , o corpo produziu um pulso esférico que vem se propagando com a velocidade do som. Esse pulso esférico, no instante t , tem raio R_A . Ao passar pelo ponto B , no instante também anterior t_2 , o corpo produziu um pulso esférico que também vem se propagando com a velocidade do som. Esse outro pulso esférico, no instante t , tem um raio R_B . Estritamente falando, ao passar por qualquer ponto, o corpo produz pulsos esféricos. No instante t considerado, a superfície envolvente desses pulsos, ou seja, a onda de choque, é uma superfície cônica, chamada de cone de Mach. O eixo do cone de Mach é a trajetória do corpo e o vértice é o ponto C , onde o corpo se encontra no instante t .

O ângulo de abertura do cone de Mach, $\theta_M = 2\alpha$, pode ser calculado usando a seguinte relação, tirada do triângulo retângulo BCD :

$$\text{sen } \alpha = \frac{v_s (t - t_2)}{v(t - t_2)} = \frac{v_s}{v}$$

Desse modo, quanto maior for o módulo da velocidade supersônica do objeto, menor será o ângulo de abertura do cone de Mach.

Todas as seções dos pulsos junto à superfície cônica têm a mesma forma e se superpõem, reforçando-se mutuamente. A onda de choque é uma estrutura cônica delgada, em que o ar se encontra a uma pressão muito maior do que a pressão atmosférica normal. Esta estrutura cônica se arrasta por trás do objeto de modo análogo à onda de proa em forma de V, que segue uma lancha ou um barco na água. Quando a onda de choque de um avião supersônico passa por um observador, ele escuta um único e forte estrondo.

No instante de tempo t considerado, as partículas do meio que estão dentro do cone de Mach já foram perturbadas pelo objeto em movimento e as partículas que estão fora, ainda não foram perturbadas. Podemos representar o resultado do movimento do corpo que se desloca, na atmosfera, com uma velocidade supersônica, como um processo contínuo de produção de pulsos sonoros esféricos que se propagam no interior do cone de Mach. A formação desses pulsos sonoros acontece às custas da energia do corpo. Em outras palavras, o corpo fica sob o efeito de uma força de resistência ao seu movimento.

Os pulsos sonoros são amortecidos com o tempo, espalhando-se por uma região do espaço cada vez maior, devido ao atrito interno (viscosidade) da própria atmosfera. Ao fim e ao cabo, a extremidade posterior do cone se dispersa no espaço.

XX. As Ondas do Mar

Para discutir um pouco mais o fato de que a onda não transporta matéria, vamos considerar uma onda do mar longe da praia. Podemos ver que a água não vai junto com a onda observando uma bola que flutua sobre a água. A bola descreve uma circunferência (ou uma elipse) para cada intervalo de tempo que leva a onda que passa por ela para se propagar uma distância equivalente à distância entre duas cristas.

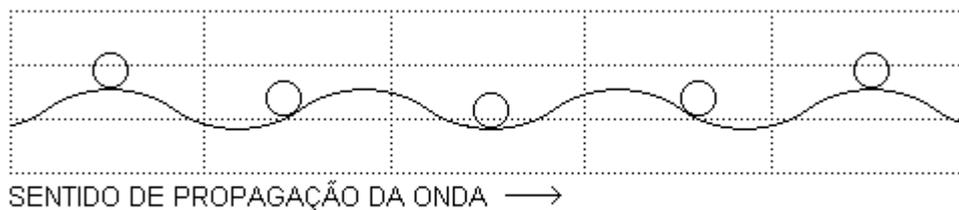


Fig.35

Observando uma bola que, inicialmente, se encontra sobre uma crista (Fig.35), vemos que ela se move para baixo e para a direita, mais para baixo e para a esquerda, para cima e para a esquerda e mais para cima e para a direita, voltando à sua posição original exatamente sobre a próxima crista. Isto se repete sucessivamente de uma crista a outra. Portanto, à medida que a onda passa, a bola sobe e desce e vai

para a direita e para a esquerda, descrevendo círculos num plano vertical. No final das contas, a bola não abandona a pequena região em que se encontra.

Longe da praia, cada elemento de volume da água se move numa trajetória circular ou elíptica num plano vertical que contém a direção de propagação da onda. O movimento de cada elemento de volume pode ser considerado como a superposição de dois movimentos harmônicos simples de mesma frequência, um na horizontal e outro na vertical. A onda do mar pode, assim, ser considerada como a superposição de duas ondas harmônicas, uma longitudinal e outra transversal, com uma diferença de fase de $\pi/2$ rad entre elas. Se o comprimento de onda é menor do que a profundidade do leito do mar, as amplitudes dessas ondas, na superfície, são iguais e o movimento dos elementos de volume da água é circular. Com o aumento da distância à superfície, as amplitudes dessas ondas diminuem. Contudo, a amplitude da onda transversal diminui mais rapidamente e, muito próximo do leito do mar, é zero. Assim, junto ao leito do mar, apenas a componente longitudinal permanece. Desse modo, com o aumento da distância à superfície, os elementos de volume da água descrevem trajetórias elípticas cada vez mais achatadas e, junto ao leito do mar, apenas oscilam longitudinalmente.

As forças restauradoras resultam principalmente das diferenças de pressão originadas pelas variações de profundidade de região a região. O papel das forças de tensão superficial é secundário, embora fique cada vez mais importante à medida que a escala do fenômeno diminui.

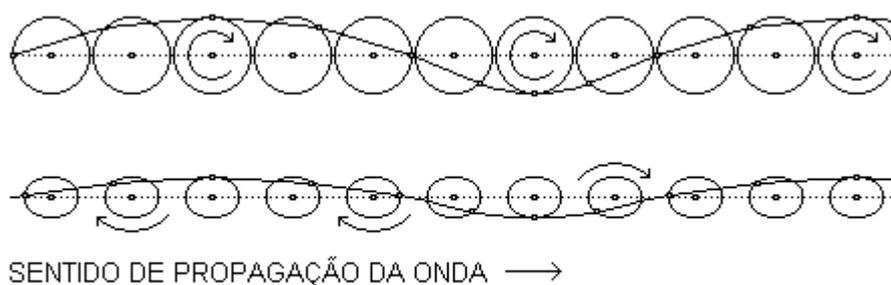


Fig.36

A Fig.36 ilustra as trajetórias do movimento dos elementos de volume na camada superficial (circunferências) e noutra camada, abaixo da superfície (elipses). A linha horizontal pontilhada superior representa a superfície livre do líquido em repouso. O sentido de propagação da onda depende do sentido em que os elementos de volume da água descrevem suas trajetórias circulares. A onda se propaga no mesmo sentido que os elementos de volume na crista da onda. A linha contínua superior representa a forma da superfície livre da água do mar no instante considerado. Os pontos nos centros das trajetórias representam as posições de equilíbrio dos elementos de volume da água.

Quanto maior o comprimento de onda de uma onda na superfície da água, maior o módulo da velocidade com que ela se desloca. Uma onda com pequeno comprimento de onda se desloca com velocidade de módulo pequeno enquanto que uma onda oceânica de grande comprimento de onda se desloca com velocidade de módulo grande. Pulsos gigantes, produzidos por terremotos e/ou erupções vulcânicas, chamados tsunamis, viajam a velocidades cujos módulos podem chegar a centenas de quilômetros por hora. Além disso, como movimentam grandes quantidades de água muito profundamente no oceano, os tsunamis levam enormes quantidades de energia.

Ao se aproximar da praia, a forma da onda do mar se modifica. Os elementos de volume da água deixam de se mover em trajetórias circulares porque, devido ao atrito com o leito do mar, o módulo da velocidade dos elementos de volume fica cada vez menor quando eles percorrem a porção inferior da sua trajetória fechada. Com isso, os elementos de volume próximos ao leito do mar vão se atrasando em relação aos elementos de volume mais altos. Então, quando o atraso é tal que os elementos de volume superiores não encontram mais sustentação nos inferiores, eles desabam e a onda se quebra.

Embora a água não se mova junto com a onda do mar, um surfista, com sua prancha, se move para frente, junto com a onda, porque desliza sobre a superfície inclinada da água como se fosse sobre a encosta de uma montanha. Como a superfície da água se levanta atrás dele, à medida que ele desliza para frente, ele progride, jamais alcançando o ventre da onda, até que esta se quebre próximo à praia.